

离散数学：引子：形式化及其极限

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gjischen@pku.edu.cn

“离散”数学

- › 离散数学 Discrete Mathematics
- › 关于“离散结构”的数学
- › 离散 Discrete 含义：分离的，不连续的 separate, discontinuous
- › 研究分立的对象之间所形成的关系
- › 离散结构源于人们对时间相继性的感知和原子性世界的经验

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

连续以及世界的本质

- › 连续，通俗来说就是**无限可分**
- › “一尺之棰，日取其半，万世不竭”
《庄子·天下篇》
- › 物质世界的本质是连续？还是离散？这是个哲学家们争论不休的问题……
- › 但在理性王国中，从自然数到有理数，再到实数，涉及到无限连续已经被创造了。
- › 数学，是如何超越直觉与经验做到的呢？

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

“数”学

- › 数学源于人们对计量的需要：
- › 计数问题：从结绳法的1、2、3……开始
- › 测量问题：长度、面积、体积
- › 出现了整数——最原始的数，源于人们对“相继出现”和“次序”的感知
- › 毕达哥拉斯信奉“万物皆数”
Number Rules the Universe
数是宇宙的本原，是现实秩序的根据
- › 数学脱离观察、直觉和经验，成为纯粹思维的产物——现代科学以至现代文明的起源



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

无理数：第一次数学危机

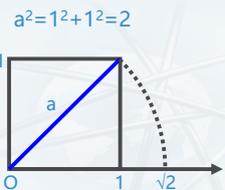
- › 数还具有了几何解释——**数轴**，数和直线上的点一一对应
- › 整数：间隔为单位长度的点
- › 分数 p/q ：将单位长度 q 等分，取 p 个等分
- › 计数和测量统一在一起
- › 一切都是完美的，以至于整数和分数被称为**有理数** (rational number)
rational: 理性的、合理的
- › 直到……



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

无理数：第一次数学危机

- › 毕达哥拉斯自己痛苦地证明了 $\sqrt{2}$ 既不是整数，也不是分数——**不是有理数**
- › 与人的**常识矛盾**：存在**不能用单位长度来测量**的线段？
- › 摧毁了毕达哥拉斯学派的基础，学派花了很长时间来保密。
- › 据说，毕达哥拉斯的一个学生希帕苏斯，由于泄露了这个秘密而被扔进了大海。
- › 人们不情愿地把这种“不理性”的数称为**无理数** (irrational number)



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

第一次数学危机的解决及启示

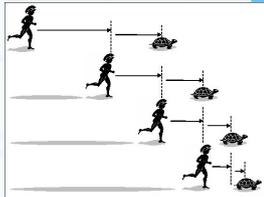
- 最后BC370由欧多克斯通过给比例（即分数）下新定义的方法所解决。
- 和1872年狄德金所给出的无理数的现代解释基本一致
- 第一次数学危机给我们的启示：
- 直觉和经验不一定靠得住，**推理和证明才是可靠的。**

古文明的际遇

- 古希腊人通过演绎推理建立形成了欧几里得《几何原本》的**公理体系**与亚里士多德的**逻辑体系**。
- 埃及、巴比伦、中国、印度等古文明的数学，并没有经历过这样的危机与革命，
- 所以也就一直停留在计量所需的“**算学**”阶段。

无穷：第二次数学危机

- 危机的潜伏：**芝诺Zeno of Elea**四个悖论（~BC450）
- 反对空间时间无限可分的两个悖论：运动不存在和**阿基里斯追不上乌龟**；
- 反对空间时间有限可分的两个悖论：飞矢不动和游行队伍。
- 古希腊人已经认识到无穷小和“很小很小”的矛盾
- <http://baike.baidu.com/view/9383.htm>

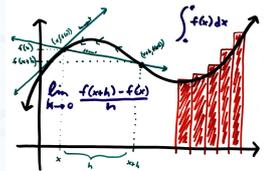


危机的爆发：微积分的基础（18世纪早期）

- 求曲线长度、包围面积、速度、切线、极大值、极小值采用的“**穷竭法**”导致了微积分的创立。
- 牛顿和莱布尼兹被认为微积分的**奠基者**
- 他们把上述各种问题的解法统一成一种方法，**微分法和积分法**，并有明确的计算微分法的步骤，微分法和积分法互为逆运算

微积分里的“无穷小”是什么？

- 无穷小量究竟**是不是零**？两种答案都会导致矛盾。
- 牛顿对它曾作过三种不同解释，但始终无法解决上述矛盾：
 - 1669年说它是一种常量；
 - 1671年又说它是一个趋于零的变量；
 - 1676年又说它是“两个正在消逝的量的最终比”。
- 大主教贝克莱讽刺它是“**消失了量的鬼魂**”



无穷级数的求和

- 格兰迪级数(Grandi's series, 1703)**
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots = ?$
- $= 1/2 ?$
- $= 1 ?$
- $= 0 ?$

危机的解决：1820s~1870s

- › 从波尔查诺Bolzano、阿贝尔Abel、柯西Cauchy、狄里赫利Dirichlet等人对**连续**的定义和**极限论**开始。
- › 到魏尔斯特拉斯、狄德金、康托等人独立地建立了**实数理论**，在实数理论上建立极限论的基础。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

第二次数学危机的结果和启示

- › 数学分析建立在实数理论的严格基础之上
- › 导致**数理逻辑**和**集合论**的诞生，由此把数学分析的无矛盾性问题归结为实数论的无矛盾性问题
- › 整个数学看来都具备了**严格的形式化**基础
- › 再次提醒人们**直觉和经验是不可靠的**
- › 无限、无穷都已经**超出了人类的经验范围**

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

理发师？第三次数学危机

- › 1901年5月，罗素Russell发现的悖论沉重打击了集合论和逻辑基础。
- ›**理发师困境**
- ›**说谎的克利特人**
- › 悖论动摇了整个数学的根本
- › 罗素提出类型论，策梅罗Zermelo提出**公理化集合论**来对朴素集合论进行限制，解决悖论问题。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

对形式系统的验证

- › 第三次数学危机解决以后，整个数学界非常乐观
- › 希尔伯特Hilbert的形式化思想占统治地位
- › 数学建立在公理化集合论和数理逻辑两块基石之上
- › 整个数学的基本理论是自然数的算术和实数理论，它们都已经公理化
- › 如果能够证明这些形式系统的一致性和完全性，整个数学基础就比较牢靠了

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

形式化的极限？

- › 1928年，希尔伯特提出四个问题，希望能够把整个数学理论系统形式化，并证明无矛盾。
- › 1930年，哥德尔Godel宣布了**不完全性定理**，这是一个具有哲学意义的普适定理。
- › 2003年，霍金以“哥德尔和物理学的终结”的演讲公开放弃对“万有理论”的追求。
- › 人们认识到对整个数学形式化的努力是注定要失败的。
- › 无矛盾的系统不完备，完备的系统却是存在自相矛盾的。

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015



离散数学：引子：悖论、版画、卡农

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gjschen@pku.edu.cn

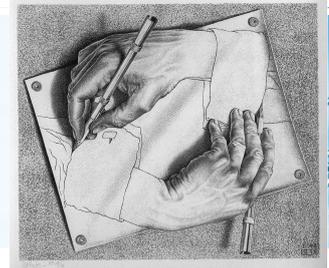
“完美”的数学终结于“自我相关”

- › “自我相关”的逻辑悖论
下面这句话是错的
上面这句话是对的
- › 哥德尔不完全性定理也运用“自我相关”
- › 证明了一切包含了自然数定义的形式系统，
要么**不完备**（不能证明所有真理），要么不**一致**（包含自相矛盾）。
- › “自我相关，层次缠绕”的怪圈无处不在

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

- › Drawing Hands



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

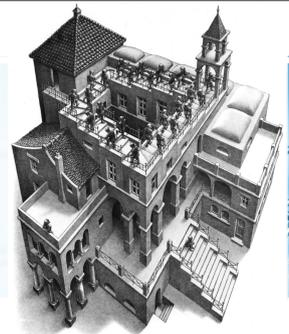
- › Print Gallery



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

- › Ascending and Descending



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

埃舍尔M. C. Escher的版画

- › Waterfall



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

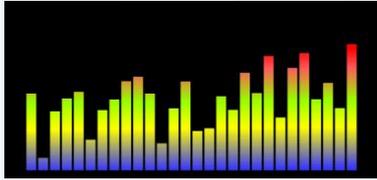
巴赫J. S. Bach《音乐的奉献Musical Offering》

- › **卡农** canon：一种**重复演奏**同一主题的音乐形式，通常用**不同的首部**来重复，每个首部都比前一个**延迟**一段时间。
- › 主题中的每个音符都必须**巧妙**和延迟的音部中同一主题的其它音符**保持和谐**。
- › 《音乐的奉献》里运用了一种特殊的卡农技巧构成自我相关的怪圈。
- › 用不同音部首尾相接的变调使听众有一种不断增调的感觉。



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

巴赫J. S. Bach 《音乐的奉献Musical Offering》



北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

以有限把握无穷

- › 人所能理解的概念和调动的资源都是有限的
- › 以少数的规则包含无限多的事实
- › 从有限的推导抓住无限丰富的未知
- › 自我相关，是一种在有限中包含无限的概念，一种以有限体现无限的过程
- › 如果把自我相关称作“递归”，大家就很熟悉了

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

以有限把握无穷

- › 人类思维过程和认知概念中包含着大量的自我相关和层次缠绕
- › 自省、自指
- › 对逻辑的研究，对智能的模拟
(以逻辑研究逻辑，以智能模拟智能)
- › 自我相关是产生思维和智能很重要的基础？
- › 但，哥德尔不完全性定理指出自我相关恰恰就是限制形式系统的幽灵。
- › 人类一思考，上帝就发笑？

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015

欢迎来到《离散数学》

- › 当然，不必太悲观，我们还是来欣赏一下人类已取得的辉煌成就
- › 让我们开始查看人类知识大厦的基础！
 - 数理逻辑
 - 集合论
 - 图论
 - 抽象代数
 - 形式语言与自动机

北京大学地球与空间科学学院/陈斌/2015