离散数学：数理逻辑：个体、谓词和量词

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

命题的解析

- 命题逻辑中最小研究单位是**原子命题**，并没有进一步的**内部结构**
- 定义：命题是对**确定**的对象作出**判断**的陈述句
- 那么，对**不确定**的对象如何？（x>5）
- 以及，进行**不同条件**下的判断如何？

命题的解析

- 命题逻辑中的推理，关注**真值**的推演
- 假言推理、归谬推理和穷举推理
- 建立在重言式、代入和替换原理基础上
- 命题逻辑中，命题之间相互**独立**，没有内在联系
- 在经典的三段论推理中，命题逻辑有些力不从心

命题之间的内在联系

- 三段论例子：
  大前提：p:*所有*的**学校**都有**学生**
  小前提：q:北京大学是**学校**
  结论：r:北京大学有**学生**
- 命题逻辑的形式化结果：
- $(p\wedge q)\rightarrow r$
- 一个**正确推理**在命题逻辑中并不是**永真式**
- 常识：三个命题包含了某些有**关联**的概念，并非相互独立

命题的结构分析

- 命题：对**确定**的**对象**作出**判断**的陈述句
- 被作判断的对象：**个体**
- 作出的判断：**谓词**
- 个体的数量：**量词**（所有、有些、没有）

命题的结构分析

- 谓词逻辑将**量词**作用于**个体**，引入**个体变元**，讨论**不确定**的对象
- 谓词逻辑也称作一阶逻辑(First Order Logic)
- 如果将量词作用于谓词，引入谓词变元，属于二阶逻辑研究范围

个体(individual)

- 谓词逻辑中将一切被讨论的**对象**都称作**个体**。
- **确定**的个体常用a,b,c表示，称作**个体常元**(constants)
- **不确定**的个体常用x,y,z,u,v,w表示，称作**个体变元**(variables)
- 被讨论对象的**全体**称作**个体域**(domain of individuals)，常记做D
- 包含**一切**对象的个体域特称为**全总域**(universe)，记做U

谓词(predicate)

- 表示个体**性质**或者**关系**的语言成分，通常是谓语，称作**谓词**
- “北京大学**是学校**”中的“…是学校”
- “张三**和**李四**是朋友**”中的“…和…是朋友”
  或者“…和…是…”
- 谓词中可以放置个体的**空位**个数称为谓词的**元数**
- 单元、二元、三元谓词

谓词命名式#1

- 将谓词中的**个体空位**用变元字母代替，称作**谓词命名式**
- 常用大写字母P、Q、R等代表谓词，谓词命名式形如**P(x)**、**Q(x,y)**

谓词命名式#2

- 命名式中的变元字母并没有独立的含义，仅是**占位符**(place holder)
- “**…**是学校”记做SCHL(**x**)
- “**…**和**…**是朋友”记做FRD(**x**,**y**)，
- “**…**和**…**是**…**”记做REL(**x**,**y**,**r**)

谓词填式#1

- 将谓词中的个体空位用个体**变元**或**常元**代替，称作谓词填式
- 谓词填式在形式上和命名式相同，但是属于不同的概念，需要根据上下文加以区分
- 类似于编程语言中的**函数说明（形参）**和**函数调用（实参）**之区分

谓词填式#2

- SCHL(**北京大学**)表示“**北京大学**是学校”
- FRD(**张三**,**李四**)表示“**张三**和**李四**是朋友”
- R(**x**)表示“**x**是实数”，x为个体变元
- 当谓词填式中的个体都是**常元**时，它是一个**命题**，具有确定的真值

量词（quantifiers）#1

- 指数量词“所有”和“有”
- “所有”为**全称**量词(universal quantifier)，记做$\forall$（Any/All）
- “有”为**存在**量词(existential quantifier)，记做$\exists$（Exist）
- **量词作用于谓词**时需要引入一个**指导变元**，同时放在量词后面和谓词填式中：$\forall xP(x)$、 $\exists xP(x)$
- 指导变元是**不可取值代入**的，称作**约束变元**(bound variables)，约束变元可以改名而不改变语句含义
- **可以取值代入**的个体变元称作**自由变元**(free variables)

量词（quantifiers）#2

- 量词所作用的谓词或者复合谓词表达式，称作量词的**辖域**(domain of quantifiers)
- 对于一元谓词，$\forall xP(x)$和$\exists xP(x)$都是命题，对于有穷的个体域
- $\forall xP(x)$等价于$P(a1)\wedge\ldots\wedge P(aN)$
- $\exists xP(x)$等价于$P(a1)\vee\ldots\vee P(aN)$

量词（quantifiers）#3

- 量词用例：

① 个体域是所有**人**，$\exists xFRD(x,张三)$表示“张三在这个世界上有朋友”

② 个体域是$\{1,2\}$，$\forall x(x>0)$等价于$(1>0)\wedge(2>0)$

③ 个体域是所有**正整数**：歌德巴赫猜想

- 所有大于2的偶数，均可表示为两个素数之和
- $\forall x\exists p\exists q(Even(x)\wedge(x>2)\rightarrow(x=p+q)\wedge Prime(p)\wedge Prime(q))$

离散数学：数理逻辑：谓词公式

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

谓词公式定义

① 谓词填式是公式，命题常元（零元谓词）是公式，称作**原子公式**

② 如果A,B是公式，x为任一变元，那么$(\neg A),(A\rightarrow B),(\forall xA),(\exists xA)$都是公式（5个联结词还要包括$\wedge,\vee,\leftrightarrow$）

③ 只有**有限次**使用上述两个条款形成的符号串是公式

- 联结词结合优先级和括号省略约定同前
- 注意$(\forall xA),(\exists xA)$中公式A可以**不包含**变元x，此时$(\forall xA),(\exists xA)$均等价于A

谓词公式成为命题

- 如果给定**个体域**，公式中的所有谓词都有**明确意义**，公式中的所有自由变元**取定个体**，谓词公式就成为一个**命题**
- 设个体域为**实数域**，$E(x,y)$表示$x=y$，$L(x,y)$表示$x<y$，那么
- $\forall xL(0, x2+1)$**真**，$\exists xE(x2+x+1, 0)$**假**
- 当个体域变成**复数域**，则上面的真值将**改变**
- 我们可以使用常用的数学公式代替谓词的形式
- $\exists x(x2+x+1=0)$

语句形式化：设个体域为人类

- 有人勇敢，但不是所有人都勇敢
- ∃xBrave(x)∧¬∀xBrave(x)
- 勇敢者未必是成功者
- ¬∀x(Brave(x)→Success(x))
- ∃x(Brave(x)∧¬Success(x))
- 君子坦荡荡，小人常戚戚
- ∀x(P(x)→Q(x))∧∀x(R(x)→S(x))
- 张三孤独走完一生
- ∀x(¬FRD(x,张三)) 或者 ¬∃xFRD(x,张三)

离散数学：数理逻辑：永真式

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

谓词公式成为命题，具有确定真值的条件

① 给定**个体域**

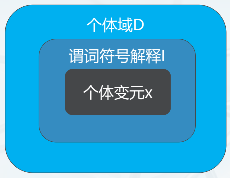
② 公式中的所有谓词都有**明确意义**（解释）

③ 公式中的所有自由变元**取定**个体

- 永真式是逻辑中重要的概念
- 谓词公式有**4个层次**的“永真”

谓词公式成真的几个层次：永真式

- 给定个体域D，公式A中各谓词符号的解释I，如果A中的自由变元x1,...,xn分别取值u1,...,un时A真，称**A在u1,...,un处真**
- 如果A在自由变元的任何取值下都真，称**A在解释I下真**
- 如果A在每个解释I下均真，称**A在D上永真**
- 如果A在任何个体域D永真，称**A永真**



谓词公式可满足式及永假式

- 如果对于**某个个体域**，谓词的**某个解释**，和自由变元的**某个取值**，公式A在此处取值真，则称公式A是**可满足式**
- 公式A不可满足时也称A是**永假式**

谓词公式的逻辑等价与逻辑蕴涵

- 逻辑等价
- A ⊨⊨ B当且仅当对**一切域**、**解释**和**变元取值状况**，A和B都具有相同的真值
- 逻辑蕴涵
- A ⊨B当且仅当对**一切域**、**解释**，一切使A成真的**变元取值状况**均使B成真

重要的谓词演算永真式#1

- 所有**命题逻辑**中的**重言式**
- 当A不含变元x时，$\forall xA \mathrel{\Dashv\vDash} A$，$\exists xA \mathrel{\Dashv\vDash} A$
- $\forall xA(x) \vDash A(x)$，$A(x) \vDash \exists xA(x)$，$\forall xA(x) \vDash \exists xA(x)$
- $\neg\exists x\neg A(x) \mathrel{\Dashv\vDash} \forall xA(x)$
- $\neg\forall x\neg A(x) \mathrel{\Dashv\vDash} \exists xA(x)$
- $\neg\exists xA(x) \mathrel{\Dashv\vDash} \forall x\neg A(x)$
- $\neg\forall xA(x) \mathrel{\Dashv\vDash} \exists x\neg A(x)$

重要的谓词演算永真式#2

- 当公式B中不含自由变元x时，有：
- $\forall xA(x)\vee B \mathrel{\Dashv\vDash} \forall x(A(x)\vee B)$
- $\forall xA(x)\wedge B \mathrel{\Dashv\vDash} \forall x(A(x)\wedge B)$
- $\exists xA(x)\vee B \mathrel{\Dashv\vDash} \exists x(A(x)\vee B)$
- $\exists xA(x)\wedge B \mathrel{\Dashv\vDash} \exists x(A(x)\wedge B)$

重要的谓词演算永真式#3

- 当公式B中含自由变元x时，有
- $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \mathrel{\Dashv\vDash} \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$
- $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \vDash \forall x(A(x)\vee B(x))$
- $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \vDash \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$
- $\exists x(A(x)\vee B(x)) \mathrel{\Dashv\vDash} \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

重要的谓词演算永真式#4

- 量词的组合与顺序：
- $\forall x\forall yA(x,y) \mathrel{\Dashv\vDash} \forall y\forall xA(x,y)$
- $\forall x\forall yA(x,y) \vDash \exists y\forall xA(x,y)$
- $\exists y\forall xA(x,y) \vDash \forall x\exists yA(x,y)$
- $\forall x\exists yA(x,y) \vDash \exists y\exists xA(x,y)$
- $\exists x\exists yA(x,y) \mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\exists xA(x,y)$

重要的谓词演算永真式#5

- 当C中无自由变元x时，有：
- $\forall x(C\rightarrow A(x)) \mathrel{\Dashv\vDash} C\rightarrow\forall xA(x)$
- $\exists x(C\rightarrow A(x)) \mathrel{\Dashv\vDash} C\rightarrow\exists xA(x)$
- $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \vDash \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

离散数学：数理逻辑：谓词演算形式系统FC

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

一阶谓词演算形式系统(First order predicate Calculus)

- FC的符号系统：
- **个体变元**：x,y,z,u,v,w,...
- **个体常元**：a,b,c,d,e,...
- **个体间运算符号**（函数符）$f^{(n)},g^{(n)},h^{(n)},\dots$
  其中n是正整数，表示函数的元数
- **谓词符号**：$P^{(n)},Q^{(n)},R^{(n)},S^{(n)},\dots$
  其中n是非负整数，表示谓词的元数
  当n=0时，谓词公式退化为命题常元
- **真值联结词**：¬，→
- **量词**：∀（∃x等价于¬∀x¬）

FC的高级语言成分：个体项

- 括号：(,)
- 个体项(term)，简称项：

① **个体变元**和**个体常元**是项

② 对任意正整数n，如果$f^{(n)}$为一n元函数符，$t_1,\dots,t_n$为项，则$f^{(n)}(t_1,\dots,t_n)$也是项

③ 除**有限次数**使用上述两个条款确定的符号串外，没有别的东西是项

FC的高级语言成分：合式公式

- 合式公式(well-formed formula)，简称公式

① 对任意非负整数n，如果$P^{(n)}$是一n元谓词符，$t_1,\dots,t_n$为项，那么$P^{(0)}$（命题常元）和$P^{(n)}(t_1,\dots,t_n)$(n>0)是公式；

② 如果A,B是公式，v为任一个体变元，那么**(¬A), (A→B), (∀vA)**（或**(∀vA(v))**）均为公式

③ 除**有限次数**使用上述两个条款确定的符号串外，没有别的东西是公式

全称封闭式(generalization closure)

- 设$v_1,\dots,v_n$是公式A中的**自由变元**，那么公式**∀v1…∀vnA**（或**∀v1…∀vnA(v1,…,vn)**）称为公式A的**全称封闭式**。
- A中**不含**自由变元时，A的全称封闭式为其**自身**

FC的公理

- **A1**:A→(B→A)
- **A2**:(A→(B→C))→((A→B)→(A→C))
- **A3**:(¬A→¬B)→(B→A)
- **A4**:∀xA(x)→A(t/x)（x为任一自由变元，t为对x可代入的项）
- **A5**:∀x(A(x)→B(x))→(∀xA(x)→∀xB(x))（x为任一自由变元）
- **A6**:A→∀xA（A中无自由变元x）
- **A7**:（A1到A6的**全称封闭式**都是FC的公理）
- 我们看到A1~A3是命题逻辑的重言式，也是谓词演算的永真式，A4~A7是谓词演算的永真式

FC的推理规则和重要性质

- FC的**推理规则**（A,B表示任意公式）
- A, A→B / B（**分离规则**）
- FC的**重要性质**

① 合理性、一致性、完备性

② 演绎定理

③ 归谬定理

④ 穷举定理

离散数学：数理逻辑：全称引入规则及存在消除规则

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

全称引入规则(universal generalization)

- 对于任意公式A，变元v，如果├A，那么├∀vA
- 证明：
- 对A的证明序列长度l进行**归纳**
- **l=1**时，**A为公理**，那么：
- 如果A中有自由变元v，∀vA就是A的**全称封闭式**，根据A7，∀vA还是公理；
- 如果A中没有自由变元，由**A**和公理A6:**A→∀vA**用分离规则， 得到**├∀vA**

全称引入规则(universal generalization)

- 假设**l<k**时全称引入规则成立，而A的证明序列是A1,A2,…,**Ak**(=A)
- ① 如果Ak是公理，则证明同上；
- ② 如果Ak**不是**公理，则一定由**Ai**和**Aj**(=**Ai→Ak**)（**i,j<k**）用**分离规则**得出
- 由归纳假设我们有**├∀vAi**和**├∀v(Ai→Ak)**
- 同时我们有公理**∀v(Ai→Ak)→(∀vAi→∀vAk)**
- 对上式公理和归纳假设结果用**两次分离规则**，得到**├∀vAk**也就是**├∀vA**
- 归纳完成，**全称引入规则**得证。

全称引入规则推广到演绎结果

- 对任何公式集**Γ**，公式**A**以及**不在**Γ中任何公式**自由出现**的变元**v**，
- 如果**Γ├A**，那么**Γ├∀vA**

全称引入规则推广到演绎结果

- 关于全称引入规则的**直觉**表述：
- 如果我们能够用一组**与变元v无关**的前提演绎出A(v)
- 表明我们已经对**任意的v**导出了A(v)，也就是∀vA(v)
- 反过来，如果前提中有公式B(v)**包含**了自由变元v
- 那么导出的A(v)是**以B(v)为前提**的，即**v不是任意的**，所以不会有∀vA(v)成立

存在消除规则(existential instantiation)

- 设A，B为任意公式，变元x是公式A，但不是公式B的自由变元
- 那么当**├∃xA(x)**，**A(x)├B**同时成立时，有**├B**
- 同样具有演绎的推广形式
- 意义：如果A(x)能推出B成立，而B中并不包含变元x，说明**B的成立与x的具体取值无关**，只需要有x能使A(x)为真，B即为真。
- 数学证明中经常使用的“不妨设……”句式，即为存在消除规则

离散数学：数理逻辑：自然推理系统

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

PC和FC的不足之处

- FC和PC一样，证明和演绎过程都过于**繁复**
- 为了追求简洁，只用2个联结词、1个量词和1条推理规则
- 如果能够引入更多的联结词、量词、**推理规则**，那么证明和演绎过程会显得更**自然**

人们经常在推理过程中使用假设

- （**演绎**）为了证明A→B，常**假设A成立**，如果能够证明B成立，则完成了A→B的证明；
- （**归谬/反证**）为了证明A，常**假设¬A**，如果导出矛盾(假命题f)，则A成立；
- （**穷举**）已知A∨B，要证明C，常**假设A**和**B**成立分别证明C，如果都能成功，则完成C的证明
- （**不妨设**）已知∃vA(v)，要证明与v无关的C，常**假设A(v0)**，如果能够证明C，则完成C的证明
- 在形式系统中引入**带假设**的**推理规则**，能够使推理过程更加接近**人的思维**，更加高效和便捷

自然推理系统ND(Natural Deduction)

- 采用5个联结词，2个量词
- **少数**公理，**更多**的规则，**引入**假设
- 用推理规则体现人的推理习惯
- ND的**符号系统**：
- 引入**5**个联结词、**2**个量词
- ND的**公理**：
- **Γ; A├A**（Γ是公式集合）

自然推理系统ND的推理规则

- **假设引入规则**
- Γ├B
- Γ; A├B（源于重言式B→(A→B)）
- **假设消除规则**
- Γ; A├B，Γ; ¬A├B
- Γ├B（源于重言式¬A→(A→B)）
- 推理中的分情况证明

自然推理系统ND的推理规则

- **∨引入规则**
- Γ├A
- Γ├A∨B（源于重言式A→(A∨B)）
- **∨引入规则（加强形式）**
- Γ; ¬B├A
- Γ├A∨B（源于重言式(¬B→A)↔(B∨A)）
- **∨消除规则**
- Γ; A├C，Γ; B├C，Γ├A∨B
- Γ├C（源于重言式(A∨B)∧(A→C)∧(B→C)→C）

自然推理系统ND的推理规则

- **$\wedge$引入规则**
- $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash B$
- $\Gamma \vdash A \wedge B$
- **$\wedge$消除规则**
- $\Gamma \vdash A \wedge B$
- $\Gamma \vdash A$

自然推理系统ND的推理规则

- **$\rightarrow$引入规则**
- $\Gamma; A \vdash B$
- $\Gamma \vdash A \rightarrow B$（即演绎定理）
- **$\rightarrow$消除规则**
- $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, $\Gamma \vdash A$
- $\Gamma \vdash B$（即分离规则）

自然推理系统ND的推理规则

- **$\neg$引入规则**
- $\Gamma; A \vdash B$, $\Gamma; A \vdash \neg B$
- $\Gamma \vdash \neg A$
- **$\neg$引入规则（2）**
- $\Gamma; A \vdash f$
- $\Gamma \vdash \neg A$（反证法）
- **$\neg$消除规则**
- $\Gamma \vdash A$， $\Gamma \vdash \neg A$
- $\Gamma \vdash B$（虚假的前提可以蕴涵任何结论）

自然推理系统ND的推理规则

- **$\neg\neg$引入规则**
- $\Gamma \vdash A$
- $\Gamma \vdash \neg\neg A$
- **$\neg\neg$消除规则**
- $\Gamma \vdash \neg\neg A$
- $\Gamma \vdash A$

自然推理系统ND的推理规则

- **$\leftrightarrow$引入规则**
- $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, $\Gamma \vdash B \rightarrow A$
- $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$
- **$\leftrightarrow$消除规则**
- $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$
- $\Gamma \vdash A \rightarrow B$

自然推理系统ND的推理规则

- **$\forall$引入规则**
- $\Gamma \vdash A$
- $\Gamma \vdash \forall v A$（v在A中无自由出现，FC公理）
- **$\forall$引入规则（2）**
- $\Gamma \vdash A(v)$
- $\Gamma \vdash \forall v A(v)$（v在Γ中无自由出现，全称引入规则）
- **$\forall$消除规则**
- $\Gamma \vdash \forall v A(v)$
- $\Gamma \vdash A(t/v)$（t对v可代入）
- 源于FC的公理A4:$\forall x A(x) \rightarrow A(t/x)$

自然推理系统ND的推理规则

- ∃引入规则
- Γ├ A(t)
- Γ├ ∃vA(v/t)（源于永真式 A(t)→∃vA(v/t)）
- ∃消除规则
- Γ├ ∃vA(v)，Γ; A(e/v)├C
- Γ├C

离散数学：数理逻辑：ND中的定理证明

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

ND中的证明和演绎

- 在ND中，称A为Γ的演绎结果，即$\Gamma\vdash_{ND}A$简记为Γ├A，如果存在如下序列：
- (Γ=Γ1)Γ1├A1, Γ2├A2, …, Γn├An(Γn=Γ,An=A)
- 使得Γi├Ai (1≤i≤n)：

① 或者是公理；

② 或者是Γj├Aj (j<i)

③ 或者是对Γj1├Aj1，…，Γjk├Ajk（j1,…,jk<i）使用推理规则导出的

- 如果有Γ├A，且Γ=ø，则称A为ND的定理

ND证明定理：├A∨¬A

- (1) A├A；公理
- (2) A├A∨¬A； ∨引入规则(1)
- (3) ¬A├ ¬A；公理
- (4) ¬A├A∨¬A； ∨引入规则(3)
- (5) ├A∨¬A；假设消除规则(2)(4)

定理证明：∀x(A(x)→B(x))→(∀xA(x)→∀xB(x))

① ∀x(A(x)→B(x)), ∀xA(x)├∀xA(x)；公理

② ∀x(A(x)→B(x)), ∀xA(x)├A(t)；∀消除规则(1)

③ ∀x(A(x)→B(x)), ∀xA(x)├∀x(A(x)→B(x))；公理

④ ∀x(A(x)→B(x)), ∀xA(x)├A(t)→B(t)； ∀消除规则(3)

⑤ ∀x(A(x)→B(x)), ∀xA(x)├B(t)；→消除规则(2)(4)

⑥ ∀x(A(x)→B(x)), ∀xA(x)├∀xB(x)； ∀引入规则(5)

⑦ ∀x(A(x)→B(x))├∀xA(x)→∀xB(x)；→引入规则(6)

⑧ ├∀x(A(x)→B(x))→(∀xA(x)→∀xB(x)) ；→引入规则

ND的一些重要性质

- FC的公理和定理都是ND的定理
- ND是合理的、一致的、完备的