离散数学：集合论：关于无限

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

集合论概念

- 集合论是以**集合**概念为基础，研究集合的一般性质的数学分支学科。
  "**集合**"是比"**数**"更简单的概念
  集合论试图从研究集合出发，定义"数"和数的"运算"，进而发展到整个数学，是研究数学基础的学科
- 集合是简单而又基本的不作定义的初始概念
  一般来说，集合是一些确定的、相异的事物的总体
- 按照集合中事物数目是否有限，可以分为**有限集合**和**无限集合**
  无限集合是集合论研究的主要对象，也是集合论建立的关键和难点

集合论与无限

- 集合论的全部历史都是围绕**无限**概念展开的
  人们把康托尔（G.Cantor，1845—1918）于**1873**年12月7日给戴德金（R.Dedekind，1831—1916）的信中最早提出集合论思想的那一天定为**集合论诞生日**。
- 康托尔对无限集合的研究使集合论成为数学中最富创造性的伟大成果之一
- 人们对于无限的研究可以追溯到两千多年以前

芝诺(Zeno)悖论，公元前5世纪

- 二分法悖论：一个物体从A地出发，永远不能到达B地
  从A到B，必须经过A和B的中点，还有中点的中点……，**有限**的时间内不能经过**无限**个点，所以A永远不能到B
- 阿基里斯追乌龟悖论：飞毛腿阿基里斯追不上他前面的乌龟
  当阿基里斯到达乌龟的出发点，乌龟已经向前走了一段，阿基里斯再走过这一段的时候，乌龟又向前走了一段，这样，两者**永远**保持一段距离，所以阿基里斯怎么也追不上乌龟

芝诺(Zeno)悖论，公元前5世纪

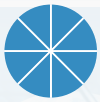
- 飞箭不动悖论
  飞箭在任何瞬间总是处在一个确定的位置，因此在此刻处在静止状态，**无限**个静止的总和还是静止，所以飞箭总是静止的。
- 芝诺悖论涉及到时间空间的连续性问题，以及**无限集合**
  自从芝诺悖论提出以来，人们一直试图指出其中的错误所在，然而直到今天，仍然没有一个完全满意的解答
- 但芝诺悖论涉及的**无限**问题却使数学家和哲学家关注了两千多年去试图解决
- 古希腊数学家排除了无限概念，几何学里设置了"**整体大于部分**"的公理

两种无限：进程和整体

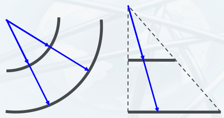
- 潜无限
  作为过程的无限，指永远延伸、永远完成不了的进程，如自然数数列1,2,3,…,n,…
- 实无限
  作为已完成的整体的无限，如自然数全体组成的整体{1,2,3,…,n,…}
- 亚里士多德(Aristotle,B.C.384-322)最先提出要区分**潜无限**和**实无限**
  并认为只存在潜无限，实无限即无限集合是不存在的，因为无限多个事物不能构成一个固定的整体。
- 由于无限集合不符合常识和经验，两千多年来，数学家都和亚里士多德一样对无限集合持否定态度

无限集合（实无限）的性质被陆续发现

- 普罗克拉斯(Proclus,410-485)在研究直径分圆的问题时发现直径数量和将圆分成部分的数量有一一对应的关系
  由于直径的数量是无穷的，所以表明直径的数量集合{1,2,3, … n, … }和圆被分成部分数量集合{2,4,6,…2n,…}之间存在一一对应的关系



- 两个大小不同的同心圆上面的点可以通过公共半径来一一对应
- 伽利略(G.Galileo,1564-1642)也发现不等长线段上的点可以构成一一对应关系。



一一对应关系

- 捷克数学家波尔察诺(B.Bolzano,1781-1848)最先明确承认并坚决拥护无限集合的概念
  将发现的**一一对应关系**称作**等价关系**
  并用大量实例指出这种关系真实存在
  如实数集[0,5]和实数集[0,12]之间的点可以建立一一对应关系：$y=(12/5)x$

康托尔对无限集合的贡献

- 1874年，在《克列尔杂志》上发表了《论所有实代数数集合的一个性质》，较全面阐述了无限集合思想
- 康托尔以**异于常识**的思考定义了无限集合，还区分了**两种**不同的无限集合：**可数集**和**具有连续统的势的集合**
  和自然数构成一一对应关系的可数集
  和实数区间[0,1]构成一一对应的具有连续统的势的集

康托尔对无限集合的贡献

- 康托尔进一步证明了一条直线上的点和整个n维空间中的点具有一一对应的关系
- 又引入了基数、序数、超限基数、超限序数等概念，并规定了它们的运算
  基数（势）的引入描述了集合中元素数量的一种刻画，并规定和区分了不同层次无限集合的基数
- 集合论需要严格运用**纯理性**的论证，其结论不是人的**直观**和**常识**所能够掌握的
- 康托尔的朴素集合论成为整个数学的基础

公理化集合论

- 但罗素悖论的发现，产生了**第三次数学危机**
- 为了在朴素集合论中消除悖论，人们想了各种办法来限制“**病态集合**”的产生
  罗素的“类型论”，限制集合和元素之间的缠绕
- 最成功的是采用希尔伯特公理化思想对朴素集合论进行公理化
  将集合作为**不作定义**的基本概念，通过一系列**公理**描述集合的性质，并避免产生悖论。
- 公理化集合论产生发展以后，普遍认为它给数学提供了一个**可靠**的基础。

关于无限的故事：希尔伯特旅馆

- 一家具有**无限间**房间的旅馆
- 某一天，已**客满**
- 又来了一位客人，住下了
- 又来了无限位客人，也住下了
- 先前的无限位客人每人带来了无限位朋友，还是都住下了……

离散数学：集合论：集合基本概念

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

什么是集合？

- 集合(set)：做为整体识别的、确定的、互相区别的一些对象的**总体**。
- **整体识别**：不再分割
- **确定**：属于或者不属于整体
- **互相区别**：各异的对象
- 集合的例子
  北京大学的全体学生：组成对象是学生
  全体自然数0，1，2，……：组成对象是各个自然数

集合的例子

- 北京大学的全体学生
  组成对象是学生
- 全体自然数0，1，2，……
  组成对象是各个自然数
- 方程$x^2-2x+1=0$的根
  组成对象是1（不是两个1）
- 方程$x^2+x+1=0$的根
  如果讨论复数，则组成对象是两个复数
  如果讨论实数，则是一个**没有任何组成对象**的集合

集合的基本概念：成员

- 组成集合的对象称为**成员**(member)或者元素(element)
  元素可以是**任何**具体或者抽象的事物
  元素也可以是**集合**
- 集合的**记号**“{,}”
  A={1,2,3}
  S={1,{2,3},10}
  N={ }
- 元素和集合的**隶属**关系
  当对象a是集合A的成员时，称**a属于A**，记做“**a∈A**”
  当对象a不是集合A的成员时，称**a不属于A**，记做“¬(a∈A)”或者“**a∉A**”

规定集合的方式：列举法、描述法、归纳法

- **列举法**：将所有元素列举
  A={1,2,3}
  $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$
- **描述法**：将集合中元素的特征用**谓词公式**描述
  A={**x|P(x)**}或者A={**x:P(x)**}
  表示x∈A当且仅当P(x)
- **归纳法**
  后面的章节专门说明
  我们已经用归纳法定义了数理逻辑中命题公式、个体项等

一些集合规定的例子

- **{0,1}**={x|x=0∨x=1}
- **N**={0,1,2,3,…}={x|x是自然数}
- $\mathbf{I^+}$={1,2,3,…}={x|x是正整数}
- **Nn**={0,1,2,…,n-1}={x|x∈N∧0≤x＜n}
- **前n个自然数集合的集合**
- ={{0},{0,1},{0,1,2},…} ={x|x=Nn∧n∈I^+}
- ={Nn|n∈I^+}

集合的基本概念

- **空集**
  没有任何元素的特定集合称为**空集**，记做$\varnothing$
  $\varnothing=\{\}=\{x|x\neq x\}$
- **有限集(finite sets)**
  空集和只含有限多个元素的集合称作**有限集**
  否则，称作**无限集**(infinite sets)
- **基数(cardinality)**
  有限集合中成员的个数称作集合的基数（无限集合的基数定义更为复杂）
  集合A的基数记做$|A|$

集合论的三大基本原理

- 外延公理、概括公理、正规公理：规定了集合概念的意义
- **外延公理**(extensionality axiom)
- 两个集合A和B**相等**当且仅当它们具有相同的元素。
- $A=B \leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$
- $\{0,1\}=\{1,0\}=\{x|x=0 \vee x=1\}$
- 说明集合元素的**无序性**，以及集合表示形式的**不唯一性**

集合论的三大基本原理

- **概括公理**(comprehension axiom)
- 对于任意**个体域U**，任一谓词公式P都确定一个以该域中的对象为元素的集合S。
- $S=\{x|x\in U \wedge P(x)\}$
- 规定了集合成员的**确定性**
- 空集：P(x)为永假式

集合论的三大基本原理

- **正规公理**(regularity axiom)
- 不存在集合A1, A2, A3, ... 使得：
- $\ldots\in A3\in A2\in A1$
- 直观来说就是集合的有限可分，**个体域**的元素是“基本粒子”
- 正规公理确立了元素和集合的不同层次性，集合不能是自己的成员
- 排除了$A=\{A\}$这样的“病态”集合

引发罗素悖论的抽象原理

- **康托尔的朴素集合论中没有考虑个体域的概念**
- $S=\{x|P(x)\}$
- **罗素悖论：考虑**
  谓词$Q(x)=x\notin x$，和集合$B=\{x|Q(x)\}$
- **要判定Q(B)的真值：**
  如果Q(B)为真，那么$B\in B$，但得到Q(B)假
  如果Q(B)为假，那么$B\notin B$，但得到Q(B)真

离散数学：集合论：子集合

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

子集合

- 集合A称作集合B的**子集合**，如果A的每一个元素都是B的元素
- $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
- A是B的子集，记做**$A \subseteq B$**
- 集合的两个基本关系：**隶属**和**包含**

子集合的例子

- $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,d\}$
- $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$
- $a \subseteq \{a,b,c\}$不成立，只有$a \in \{a,b,c\}$
- $\{a,b\} \subseteq \{\{a,b\},\{c,d\}\}$：false
- $\{a,b\} \in \{\{a,b\},\{c,d\}\}$：true
- 有时候隶属和包含关系会同时成立
  $\{1\}$和$\{1,\{1\}\}$之间的关系

子集合的性质

- **定理1**：对于任意集合A和B，A=B当且仅当$A \subseteq B$且$B \subseteq A$
- 特别的，对于任意集合A，有$A \subseteq A$
- 证明：
- $A=B$
- $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$......外延公理
- $\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$
- $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$
- $\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

子集合的性质

- **定理2**：设A,B,C为任意集合，若
- $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$，则有$A \subseteq C$
- 利用逻辑蕴涵式I6：
  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \models A \rightarrow C$来证明
- **定理3**：对于任意集合A，$A \subseteq U$
- 因为$x \in U$是**恒真**的，所以$\forall x(x \in A \rightarrow x \in U)$也是恒真的

子集合的性质

- **定理4**：对于任何集合A，$\varnothing \subseteq A$
- 因为$x \in \varnothing$是**恒假**的，所以$\forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$是恒真的
- **定理5**：空集是唯一的
- 假设有两个空集**ø1**和**ø2**，
- 根据**定理4**，有**$\varnothing 1 \subseteq \varnothing 2$**，而且**$\varnothing 2 \subseteq \varnothing 1$**
- 再根据**定理1**，$\varnothing 1 = \varnothing 2$

子集合的性质

- **定理6**：设A为一有限集合，$|A|=n$，那么A的子集个数为2^n
- A的子集有：
  ø：$C_n^0=1$个
  只有包含A中1个元素的子集：C_n^1个
  只有包含A中2个元素的子集：C_n^2个
  ......
  包含A中所有元素的子集：A本身，$C_n^n=1$个
- 总和：$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$个
- 例：$\{1,2\}$的子集：$\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}$

真子集(proper subset)

- 如果$A \subseteq B$且$A \neq B$，记做：$A \subset B$
- 空集ø是所有非空集合的真子集
- 判断题：

$\emptyset \subseteq \emptyset$

$\emptyset \in \emptyset$

$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

$\emptyset \in \{\emptyset\}$

如果$A \in B$且$B \in C$，那么$A \in C$

离散数学：集合论：集合运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

集合基本运算

- 集合运算指以集合作为**运算对象**，**结果**还是**集合**的运算
- **并运算**：∪(union)
- 定义：$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- $\{1,2\} \cup \{1,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
- **交运算**：∩(intersection)
- 定义：$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$

集合基本运算

- **差运算** - (difference)
- 定义：$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- $\{1,2,3\} - \{2,3,4\} = \{1\}$
- **补运算**~(complement)
- 定义：$A^{\sim} = U - A = \{x | x \notin A\}$
- $\{0,1,2,3,4\}^{\sim} = \{5,6,7,\ldots\}$ ($U=N$)

交和并运算性质

- $A \cup A = A$；$A \cap A = A$
- **交换律**：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$
- **结合律**：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup \emptyset = A$；$A \cup U = U$；$A \cap \emptyset = \emptyset$；$A \cap U = A$
- **分配律**：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap (A \cup B) = A$，$A \cup (A \cap B) = A$

差和补运算性质

- $A - A = \emptyset$，$A - \emptyset = A$，$A - U = \emptyset$
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- 利用德摩根律得证
- $A^{\sim\sim} = A$，$U^{\sim} = \emptyset$，$\emptyset^{\sim} = U$
- $A \cup A^{\sim} = U$，$A \cap A^{\sim} = \emptyset$
- $(A \cup B)^{\sim} = A^{\sim} \cap B^{\sim}$，$(A \cap B)^{\sim} = A^{\sim} \cup B^{\sim}$
- $A - B = A \cap B^{\sim}$

集合运算和子集关系

- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A - B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing \Leftrightarrow A \cup B=B \Leftrightarrow A \cap B=A$
- 如果$A \subseteq B$，则有$B^{\sim} \subseteq A^{\sim}$

利用运算性质证明

- 对于任意集合A,B，如果有$A \cup B=U$且$A \cap B=\varnothing$，那么$A=B^{\sim}$
- 证明1：按照A=B的定义
- 证明2：按照运算性质的等式
- $A = A\cap U = A\cap(B\cup B^{\sim})$
- $=(A\cap B)\cup(A\cap B^{\sim}) = \varnothing\cup(A\cap B^{\sim})$
- $=(B\cap B^{\sim})\cup(A\cap B^{\sim})$……分配律，提出$B^{\sim}$
- $=(B\cup A)\cap B^{\sim} = U\cap B^{\sim}$
- $=B^{\sim}$

幂集(power set)运算

- 对任意集合A，ρ(A)称作A的幂集，定义为：$\rho(A)=\{x|x\subseteq A\}$
- A的**所有子集**作为元素构成的集合(族)
- 因为$\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$；所以必有$\varnothing\in\rho(A)$，$A\in\rho(A)$
- 例：$\rho(\{1,2\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
- 幂集的基数：$|\rho(A)|=2^{|A|}$

幂集的性质

- 设A,B为任意集合：
- $A\subseteq B$当且仅当$\rho(A) \subseteq \rho(B)$
- **证明必要性**：$(A \subseteq B)\rightarrow(\rho(A) \subseteq \rho(B))$
- 设$A \subseteq B$，又设**任意$X\in\rho(A)$**，有$X \subseteq A$
- 因为$A \subseteq B$，所以$X \subseteq B$
- **有$X\in\rho(B)$**
- 根据子集定义，$\rho(A) \subseteq \rho(B)$

幂集的性质

- **证明充分性**：$(\rho(A) \subseteq \rho(B))\rightarrow(A \subseteq B)$
- 设$\rho(A) \subseteq \rho(B)$，假设$A \subseteq B$不成立
- 则存在$a\in A$，但是$a\notin B$
- 也就是**$\{a\}\in\rho(A)$**，但是**$\{a\} \notin \rho(B)$**
- 这个与$\rho(A) \subseteq \rho(B)$矛盾
- 所以$A \subseteq B$得证

离散数学：集合论：集合族及运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

集合族与标志集

- **集合族(collections)**
  如果集合C中的**每个元素**都是**集合**，称C为**集合族**
- **集合族的标志集(index set)**
  如果集合族C可以表示为某种下标的形式
  $C=\{S_d|d\in D\}$
  那么这些**下标**组成的**集合**称作集合族C的**标志集**
- **标志集可以是自然数、某些连续符号**

集合族和标志集例子

- **$C=\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\ldots\}$是集合族，但是没有标志集**
- **如果定义$N_n=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$，那么C就可以表示为$\{N_n|n\in I^+\}$，这样C的标志集就是I^+**
- **集合族$C=\{S_a,S_b,S_c\}=\{S_d|d\in\{a,b,c\}\}$，标志集就是$\{a,b,c\}$**
- **A的幂集$\rho(A)$是一个集合族**

集合族的运算

- **广义并：集合族中所有集合的并集**
- $\cup C=\{x|\exists S(S\in C\wedge x\in S)\}$
- **广义交：集合族中所有集合的交集**
- $\cap C=\{x|\forall S(S\in C\rightarrow x\in S)\}$
- **如果C恰含两个集合A,B**
- **则$\cup C=A\cup B$，$\cap C=A\cap B$**
- **有标志集的表示方法：$C=\{A_d|d\in D\}$**
- $\cup C=\cup_{d\in D}A_d$，$\cap C=\cap_{d\in D}A_d$

集合族运算例子

- $C=\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\ldots\}$
- $\cup C=N$
- $\cap C=\{0\}$

- $C=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3,5\}\}$
- $\cup C=\{1,2,3,5\}$
- $\cap C=\{1\}$

集合族运算性质

- **任意集合A和集合族C，有**
- $A\cap(\cup C)=\cup\{A\cap S:S\in C\}$
- $A\cup(\cap C)=\cap\{A\cup S:S\in C\}$
- $A-(\cap C)=\cup\{A-S:S\in C\}$
- $A-(\cup C)=\cap\{A-S:S\in C\}$
- $(\cup C)^{\sim}=\cap\{S^{\sim}:S\in C\}$
- $(\cap C)^{\sim}=\cup\{S^{\sim}:S\in C\}$

证明：$A-(\cup C)=\cap\{A-S:S\in C\}$

- $x\in A-(\cup C)$
- $\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin\cup C$
- $\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(\exists S(S\in C\wedge x\in S))$
- $\Leftrightarrow x\in A\wedge\forall S(S\notin C\vee x\notin S)$
- $\Leftrightarrow\forall S((x\in A\wedge S\notin C)\vee(x\in A\wedge x\notin S))$
- $\Leftrightarrow \forall S((x\notin A\vee S\in C)\rightarrow(x\in A-S))$
- $\Leftrightarrow \forall S(((x\notin A)\rightarrow(x\in A-S))\wedge((S\in C)\rightarrow(x\in A-S)))$
- $\Leftrightarrow \forall S((S\in C)\rightarrow(x\in A-S))$
- $\Leftrightarrow x\in\cap\{A-S:S\in C\}$

幂集与集合族运算

- 证明：对任意集合A，∪ρ(A)=A
- $x \in \cup\rho(A)$
- $\Leftrightarrow \exists S(S \in \rho(A) \wedge x \in S)$
- $\Leftrightarrow \exists S(S \subseteq A \wedge x \in S)$
- $\Leftrightarrow \exists S(x \in A)$
- $\Leftrightarrow x \in A$

离散数学：集合论：归纳定义

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

集合的归纳定义

- 集合定义的另两种方式：列举法、描述法
- 归纳定义(inductive definition)
  - **基础条款**：规定某些元素为待定义集合成员，集合其它元素可以从基本元素出发逐步确定
  - **归纳条款**：规定由已确定的集合元素去进一步确定其它元素的规则
  - **终极条款**：规定待定义集合只含有基础条款和归纳条款所确定的成员
- 基础条款和归纳条款称作“**完备性条款**”，必须保证毫**无遗漏**产生集合中**所有成员**
- 终极条款又称“**纯粹性条款**”，保证集合中**仅包含**满足完备性条款的那些对象

归纳定义例子：“圣诞节”

- 基础条款
  耶稣基督降生的**那天**是圣诞节
- 归纳条款
  如果某天是圣诞节，**则**这一天后的第365天也是圣诞节（不考虑闰年）
- 终极条款
  除了上面两条所包括的日子，其它日子都不是圣诞节

归纳定义例子：偶数集合

- 个体域U为自然数集，定义偶数集E
- **基础条款**：$0 \in E$
- **归纳条款**：若$x \in E$，则$x+2 \in E$
- **终极条款**：除了有限次使用上述条款确定的元素以外，E中没有别的元素
- 奇数集O的定义？

归纳定义例子：程序

- 基础条款：
  v:=e是程序（其中v是变量，e是算术表达式）
- 归纳条款：
  若p1,p2是程序，则p1;p2也是程序
  若p1,p2是程序，则if c then p1 else p2 end if也是程序（其中c是条件表达式）；
  若p是程序，则while c do p end while也是程序；
- 终极条款（略）

离散数学：集合论：自然数定义

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

自然数定义

- 数学中“**数**”是最基本的原始概念，在集合论创立之后，采用集合来定义自然数，
- 使得数学建立在更为简单的概念“**集合**”基础之上
- 在算术公理化系统中，皮亚诺(Peano)的5大公理刻画了自然数概念
  P1：至少有一个对象是自然数，记做**0**；
  P2：如果n是自然数，那么n必定恰有一个**直接后继**，记做n'
  P3：0**不是**任何自然数的**直接后继**
  P4：如果自然数m,n的直接后继m',n'相同，那么**m=n**
  P5：没有不满足上述条件的对象是自然数

利用集合定义自然数要考虑的几个问题

- 找一个最简单的集合作为0
- $\varnothing$
- 找一种集合运算定义“直接后继”
- ∪? ∩ ? - ?
- 这种集合运算不可能得到0对应的那个集合
- $\varnothing$
- 可以通过集合关系反应自然数的顺序性质
- $\subseteq$、$\subset$

自然数集N的归纳定义

- **基础条款**：$\varnothing \in N$
- **归纳条款**：如果$x \in N$，则$x' = x \cup \{x\} \in N$
- **终极条款**（略）
- 自然数集的列举定义：
- $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$
- 实际上有：$1=\{0\}$, $2=\{0,1\}$, $3=\{0,1,2\}$
- $0 \in 1 \in 2 \in 3 \ldots$同时也有$0 \in 3$
- 还有$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \ldots$
- $1 \subseteq 2$，$4 \subseteq 10$，$10 \subseteq 10$体现了顺序关系，而且子集关系具有传递性

如果我们用$x'=\{x\} \in N$作直接后继会如何？

- $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$
- $0 \in 1 \in 2 \in 3$
- 但是没有$1 \in 3$
- 子集关系$\subseteq$在自然数之间也不成立

递归定义自然数的运算：+、×

- 加法的定义：
- $x + 0 = x$
- $x + y' = (x + y)'$
- 如：
- $3+2$
- $=(3+1)'$
- $=((3+0)')'$
- $=(3')'=4'=5$

递归定义自然数的运算：+、×

- 乘法的定义
- $x \times 0 = 0$
- $x \times y' = (x \times y) + x$
- 例子
- 如：$3\times2=(3\times1)+3=((3\times0)+3)+3$
- $=(0+3)+3=(0+2)'+3=((0+1)')'+3$
- $=(((0+0)')')'+3=((0')')'+3=3+3$
- =……
- =6

离散数学：集合论：归纳原理

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

归纳原理

- 设集合A是**归纳定义**的集合
- 要证明A中所有元素具有性质P，即：$\forall x(x\in A\rightarrow P(x))$，可以进行如下的证明：
- （**归纳基础**）针对归纳定义的基础条款，证明基础条款中的所有元素均使$P(x_0)$**真**
- （**归纳推理**）证明归纳条款是"**保持性质P的**"
- 即在假设归纳条款中已确定元素x使P(x)真的前提下，证明用归纳条款中的**操作g**所生成的**g(x)**依然有性质P，即**P(g(x))为真**

证明：命题公式中左括号的数量等于右括号的数量

- 命题公式，是由归纳定义所定义的集合
- 设L[A],R[A]分别表示公式A的左括号数量和右括号数量
- （**归纳基础**）：对于命题变元(或常元)p，L[p]=R[p]=0
- （**归纳推理**）：设L[A]=R[A], L[B]=R[B]，那么：
- $L[(\neg A)]=L[A]+1=R[A]+1=R[(\neg A)]$
- $L[(A\rightarrow B)]=L[A]+L[B]+1=R[A]+R[B]+1=R[(A\rightarrow B)]$
- 所以对于一切命题公式，左括号数量等于右括号数量

离散数学：集合论：数学归纳法

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

数学归纳法

- 既然自然数集合也是归纳定义的，对于**自然数的一些性质**，也可以通过归纳原理来证明
- 即我们通常用的"**数学归纳法**"
- 第一数学归纳法
- **归纳基础**：证明**P(0)**为真
- **归纳过程**：对于任意k≥0假设**P(k)**为真时，推出**P(k+1)**也为真
- 结论：所有自然数n都使P(n)为真

数学归纳法例子

- 证明对任意自然数有$(0+1+2+...+n)^2=0^3+1^3+2^3+...+n^3$
- 归纳基础：当n=0，$0^2=0^3$
- 归纳过程：
- 设当n=k时，$(0+1+2+...+k)^2=0^3+1^3+2^3+...+k^3$成立，
- 当n=k+1时，$(\underline{0+1+2+...+k}+(k+1))^2$
- $=\underline{0^3+1^3+2^3+...+k^3}+(k+1)^2+2(\underline{0+1+2+...+k})(k+1)$
- $=0^3+1^3+2^3+...+k^3+\underline{(k+1)^2+k(k+1)^2}$
- $=0^3+1^3+2^3+...+k^3+\underline{(k+1)^3}$
- 归纳完成，命题得证※

数学归纳法的变种

- **起始于任意自然数n_0的数学归纳法**
  证明所有大于等于n_0的自然数都具有性质P
- **起始于多个自然数的数学归纳法**
  归纳基础：证明P(0),P(1)真
  归纳过程：对于任意k≥0假设P(k)为真时，推出P(k+2)也为真
  结论：所有自然数具有性质P
- **允许有参变量的数学归纳法**
  对于二元谓词P(m,n)，证明对于一切自然数m,n都为真，可以视情况只对一个变量进行归纳，另一个变量作为参数

数学归纳法例子

- 证明：3分币和5分币可以组成8分以上任何币值
- 证明：8=3+5; 9=3+3+3; 10=5+5
- 假设k可以用3分和5分币组成，
- 需要证明k+3时命题真，
- 这是显然的，只要再加一个3分币即可

数学归纳法的正确性证明

- 假设我们已经完成下面的推理：
- 归纳基础：P(0)真；
- 归纳推理：$\forall k(P(k)\rightarrow P(k+1))$
- 但是还并非所有自然数都有性质P
- 将这些不满足性质P的自然数构成一个非空自然数子集，这样，子集中必定有一个最小的自然数，设为m
- 显然m>0，记做n+1，这样n一定具有性质P，即P(n)为真
- $\exists n(P(n)\wedge\neg P(n+1)) \vDash \neg\forall k(\neg P(k)\vee P(k+1)) \vDash \neg\forall k(P(k)\rightarrow P(k+1))$
- 假设推理结果与已经完成的归纳推理矛盾，所以假设错误
- 即数学归纳法成立，所有自然数都有性质P