离散数学：集合论：等价关系

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

等价关系(equivalent relation)定义

- 等价关系R定义为：
- A上的自反、对称、传递的二元关系
- xRx；xRy→yRx；xRy∧yRz→xRz
- 例子：
- 三角形的相似、全等关系；
- 学生的舍友关系；
- 人的亲戚关系（朋友关系？同学关系？）
- 整数集上的“模k相等”关系：
- $x=_k y \Leftrightarrow k|(x-y)$

等价类（equivalent class）

- 设R为A上的等价关系，
- 对于每个a∈A，a的等价类记做$[a]_R$(简记[a])，定义为：$[a]_R=\{x|x∈A \wedge xRa\}$，
- a称作$[a]_R$的代表元素
- 等价类是A的子集，每个代表元素确定一个等价类
- 例：“模2相等”，有2个等价类：[0]和[1]
- 相等关系E_A有|A|个不同的等价类，每个等价类都是单元素集合
- 全关系A×A只有一个等价类A

等价类的性质

- A上的任何一个等价关系R，任何一个元素a，
- 等价类$[a]_R$都不会是空集，因为总有aRa（等价关系的自反性）
- 同一个等价类可能有不同的代表元素
- 或者另一种说法：不同的元素可能有相同的等价类

等价类定理

- R是A上的等价关系，则任意的a,b∈A，aRb当且仅当$[a]_R=[b]_R$
- 设aRb，又x∈[a]，那么xRa，R的传递性，有xRb，所以x∈[b]
- 同理x∈[b]推出x∈[a]，所以[a]=[b]
- 设[a]=[b]，a∈[a]，又有a∈[b]，所以aRb

等价类定理

- R是A上的等价关系，则任意的a,b∈A，要么[a]=[b]，要么[a]∩[b]=∅
- 证明方法：$p\vee q \;\vDash\; \neg p \to q$
- 设[a]∩[b]≠∅，有x∈[a]∩[b]，即xRa和xRb
- 由R的对称性，有aRx，与前面的xRb，由R的传递性，有aRb
- 根据前一个定理，有[a]=[b]

离散数学：集合论：等价关系与划分

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

划分(partitions)的定义

- 划分是满足下列条件的集合A的**子集族**π
- ∀B(B∈π→**B≠∅**)（**不空**）
- ∪π=**A**（**不漏**）
- ∀B∀B'(B∈π∧B'∈π∧B≠B'→**B∩B'=∅**)（**不交**）
- π中的元素称为划分的**单元**
- 特别约定A=∅时只有划分∅

划分的例子

- A={1,2,3,4}
- π_1={{1},{2},{3},{4}}
- π_2={{1,3},{2,4}}
- π_3={{1,3,4},{2}}
- π_4={{1,2,3,4}}
- {{1,2},{4}}?
- {{1,2,3},{2,4}}?

等价关系与划分

- 很明显，A上的等价关系R的**所有等价类的集合**，构成A的一个**划分**，
- 称作等价关系R**对应**的划分：
- {$[x]_R$|x∈A}，所有等价类的集合是一个划分
- 反过来，集合A的一个划分π，也对应A上的一个**等价关系**R，
- 称作划分π**对应**的等价关系
- R={<x,y>| ∃B(B∈π∧x∈B∧y∈B)}
- R=$\cup_{B\in\pi}$B×B= ∪{B×B|B∈π}

等价关系和划分的一一对应

- 对应π的等价关系为R，**当且仅当**R对应的划分为π
- 证明**必要性**，设对应π的等价关系为R，R对应的划分为π'，要证明π=π'
- 设任意a∈A，包含a的B∈π，B'∈π'
- b∈B⇔aRb⇔b∈$[a]_R$⇔b∈B'
- 左半部：π对应的等价关系是R
- 右半部：R对应的划分是π'
- 所以B=B'，由于a是任意的，所以π=π'

等价关系和划分的一一对应

- 证明**充分性**，设R对应的划分为π，π所对应的等价关系为R'，要证明R=R'
- 取A中任意元素a,b
- aRb⇔b∈$[a]_R$
- ⇔ ∃B(B∈π∧$[a]_R$=B∧b∈B)（R对应π）
- ⇔ ∃B(B∈π∧a∈B∧b∈B)
- ⇔ aR'b（π对应等价关系R'）
- 所以R=R'

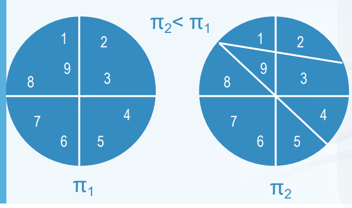
离散数学：集合论：划分之间的关系

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

划分之间的关系

- 划分的“**粗细**”概念
- 自然的，$|\pi|$越大，越“细”
- 两个划分之间如何比较粗细？
- “**细于**”关系的定义
- 如果π_1的每一个单元都包含于π_2的某个单元，称π_1细于π_2，表示为$\pi_1 \le \pi_2$
- 如果$\pi_1 \le \pi_2$而且$\pi_1 \ne \pi_2$，则表示为$\pi_1 < \pi_2$，称作“**真细于**”

划分的“粗细”



划分的“细于”和等价关系的“子集”

- π_1，π_2分别是等价关系R_1，R_2对应的划分，那么$R_1 \subseteq R_2 \leftrightarrow \pi_1 \le \pi_2$
- 证明**必要性**：设$R_1 \subseteq R_2$，B_1为π_1中任意一个单元，令$B_1=[a]_{R1}$，$a \in A$。
- 要证明B_1包含于π_2中的某个单元
- 考虑$[a]_{R2}=B_2 \in \pi_2$，对于任一$b \in B_1$，有bR_1a，
- 而$R_1 \subseteq R_2$，所以有bR_2a，故$b \in [a]_{R2}=B_2$，得到了$B_1 \subseteq B_2$，所以$\pi_1 \le \pi_2$
- 证明**充分性**：设$\pi_1 \le \pi_2$，xR_1y，那么有π_1中单元$B_1=[x]_{R1}$，使$x,y \in B_1$，
- 由于$\pi_1 \le \pi_2$，所以有π_2中的单元B_2，使得$B_1 \subseteq B_2$；
- 从而$x,y \in B_2$，即x,y属于同一个R_2等价类，所以有xR_2y，得到了$R_1 \subseteq R_2$

划分的“细于”和等价关系的“子集”

- 定理说明，越“小”（包含二元组较少）的等价关系对应越细的划分；
- 最小的等价关系是**相等关系**E_A，对应最细的划分：每个单元仅含一个元素
- 最大的等价关系是**全关系**，对应最粗的划分：仅有一个单元
- 如模2相等关系、模3相等关系和模6相等关系三个等价关系中
  模2相等关系对应的划分包含2个单元
  模3相等关系对应的划分包含3个单元
  模6相等关系对应的划分包含6个单元
  模6的划分细于模3的划分：$[x]_6 \subseteq [x]_3$
  模6的划分细于模2的划分：$[x]_6 \subseteq [x]_2$

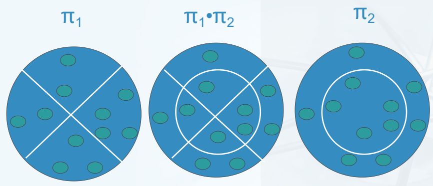
离散数学：集合论：划分运算

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

划分的运算

- 对应于等价关系的并、交运算，划分也有相应的运算。
- **积划分**运算：
- 划分π_1和π_2的积划分$\pi_1 \cdot \pi_2$是满足如下条件的划分：
- $\pi_1 \cdot \pi_2$细于π_1和π_2
- 如果某个划分π细于π_1和π_2，则π一定细于$\pi_1 \cdot \pi_2$
- 也就是说，$\pi_1 \cdot \pi_2$是细于π_1和π_2的最粗划分

积划分运算



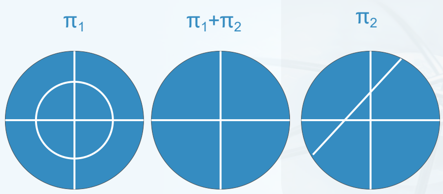
积划分对应于等价关系交运算

- R_1和R_2分别是π_1和π_2对应的等价关系，则$\pi_1 \cdot \pi_2$是等价关系$R_1 \cap R_2$对应的划分
- 首先，$R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$，$R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$，因此$R_1 \cap R_2$ 对应的划分必然细于π_1和π_2
- 其次，假设有细于π_1和π_2的划分π，
- π对应的等价关系是R，则$R \subseteq R_1$，$R \subseteq R_2$，
- 所以有$R \subseteq R_1 \cap R_2$，所以R所对应的划分π必然细于$R_1 \cap R_2$所对应的划分
- 根据定义，$R_1 \cap R_2$所对应的划分就是$\pi_1 \cdot \pi_2$

和划分运算

- 划分π_1和π_2的**和划分**$\pi_1+\pi_2$是满足如下条件的划分：
- π_1和π_2均细于$\pi_1+\pi_2$
- 如果有划分π，π_1和π_2均细于π，则$\pi_1+\pi_2$细于π。
- 也就是说，$\pi_1+\pi_2$是粗于π_1和π_2的最细划分

和划分运算



和划分对应于等价关系的并运算？

- 否！等价关系中的**传递**性质对于**并**运算**不封闭**
- 针对传递性质**扩展**并运算结果，定义：二元关系R的**传递闭包**t(R)
- t(R) 是传递的，$R \subseteq t(R)$
- 同时，对于A上的任意一个具有传递性质且包含R的关系R'，$t(R) \subseteq R'$
- 和划分对应于等价关系并运算结果的传递闭包
- R_1和R_2分别是π_1和π_2对应的等价关系
- 则$\pi_1+\pi_2$是等价关系$t(R_1 \cup R_2)$对应的划分

商集(quotient sets)

- R 是 A 上的等价关系，称 A 的划分 $\{[a]_R|a\in A\}$为A的R商集，记做A/R
- 每一个划分π均为A上的一个商集，相应的商集的和、积对应于划分的和与积。
- $A/(R_1\cap R_2)=A/R_1\cdot A/R_2$
- $A/t(R_1\cup R_2)=A/R_1+A/R_2$

离散数学：集合论：序关系

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

序关系（ordered relation）

- 序关系R定义为：
- 集合A上的**自反**、**反对称**、**传递**的二元关系：
- xRx； $xRy\wedge yRx\to x=y$； $xRy\wedge yRz\to xRz$
- 存在序关系R的集合A称作**有序集**（ordered set）
- 用二元有序组$\langle A, R\rangle$表示，一般的有序集表示成$\langle A, \le\rangle$

序关系例子

- 实数集R上的“小于或等于”关系是序关系，有序集记做$\langle R, \le\rangle$
- 集合A的幂集ρ(A)上的“包含关系”是序关系，有序集记做$\langle \rho(A), \subseteq\rangle$
- 正整数集合I+上的“整除”关系是序关系，有序集记做$\langle I+, |\rangle$

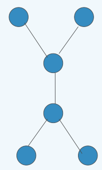
哈斯图（Hasse graph）

- 对序关系关系图的一种简化画法
- 由于序关系自反，各结点都有环，省去；
- 由于序关系反对称且传递，所以关系图中任何两个不同的结点直接不会有双向的边或通路，所以省去边的箭头，把向上的方向定为箭头方向
- 由于序关系传递，所以省去所有推定的边，即$a\le b, b\le c$有$a\le c$，省去ac边

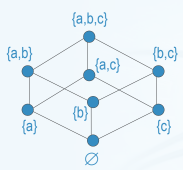
$\langle\{1,2,3,4,5\}, \leqslant\rangle$

哈斯图例子

$\langle\{2,3,6,12,24,36\}, |\rangle$



$\langle p(\{a,b,c\}), \subseteq\rangle$



有序集集合元素中的排序

- a≤b，称a**先于或等于**b；a**小于或等于**b；
- 如果¬(a≤b)，则称a,b**不可比较**或者**不可排序**。

离散数学：集合论：序关系中特殊元素

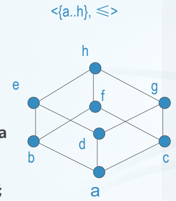
陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

最大（小）元、极大（小）元

- <A, ≤>为有序集，**B⊆A**
- B的**最小元**b：b∈B∧∀x(x∈B→b≤x)
- B的**最大元**b：b∈B∧∀x(x∈B→x≤b)
- B的**极小元**b：
- b∈B∧¬∃x(x∈B∧x≠b∧x≤b)
- B的**极大元**b：
- b∈B∧¬∃x(x∈B∧x≠b∧b≤x)
- 极大和最大的差别在于B中是否包含不可比较的元素

有序集：A={a,b,c,d,e,f,g,h}

- B={a,b,c,f}
- 最大元f，最小元a
- 极大元f，极小元a
- B={a,b,c,d}
- 没有最大元，最小元a
- 极大元b,c,d，极小元a
- B={b,c,d,h}
- 最大元h，没有最小元
- 极大元h，极小元b,c,d



关于最大（小）元，极大（小）元的定理

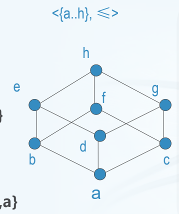
- B的最大（小）元必为B的极大（小）元
- 如果B有最大（小）元，则它是唯一的
- 如果B是有限集，则B的极大（小）元恒存在
- 最大（小）元未必存在，存在则唯一
  不包含不可比较的元素的有序集必然有最大（小）元
- 极大（小）元对有限集必然存在，未必唯一
  存在最大（小）元的有限有序集，其极大（小）元就等于最大（小）元

上（下）界，上（下）确界

- <A, ≤>为有序集，B⊆A
- B的**上界**a：a∈A∧∀x(x∈B→x≤a)
- B的**下界**a：a∈A∧∀x(x∈B→a≤x)
- B的**上确界**a：a是B的所有上界的集合最小元
- B的**下确界**a：a是B的所有下界的集合最大元

有序集：A={a,b,c,d,e,f,g,h}

- **B={b,c,d}**
- 上界h，下界a
- 上确界h，下确界a
- **B={c,d}**
- 上界{g,h}，下界{a}
- 上确界g，下确界a
- **B={d,g}**
- 上界{g,h}，下界{d,a}
- 上确界g，下确界d

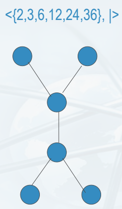


关于上（下）界，上（下）确界的定理

- 如果b是B的最大（小）元，则b是B的上（下）确界
- 如果b是B的上（下）界，而且b∈B，则b一定是B的最大（小）元
- 如果B有上（下）确界，则上（下）确界是唯一的
- 上下界未必存在，存在时也未必唯一
- 有了上（下）界，也未必存在上（下）确界

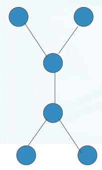
链和反链

- **链**（chain）
- 如果子集B中的任意两个元素都是可以比较的
- ∀x∀y(x,y∈B→x≤y∨y≤x)
- **反链**（anti-chain）
- 子集B中的任意两个元素都是不可比较的
- ∀x∀y(x,y∈B∧x≠y→ ¬(x≤y)∧¬(y≤x))
- |B|称作是链或者反链的长度



链和反链定理

- <A, ≤>是有限的有序集，B⊆A
- 如果A中最长的链长度为n
- 则A存在一个划分，划分有n个单元，每个单元都是一反链



半序关系（Partially ordered relation）

- 序关系R为集合A上的**反自反**、**反对称**、**传递**的二元关系
- ¬(xRx), xRy∧yRx→x=y, xRy∧yRz→xRz
- 将<A,R>称作为半序集
- 实数集合上的“**大于**”关系
- 公司内部职员的“**下属**”关系

离散数学：集合论：函数

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

函数是最重要的数学工具之一

- 我们在不同阶段学习的函数概念
- **因变量**：随自变量取值而变化；
- y=x+5：算术表达式
- **映射**：从定义域到值域的对应关系。
- y=f(x)：更为普遍的对应
- **集合论中的函数**
- 将函数看作一种**特殊的关系**
- 归结为集合，归结为关系进行研究
- 我们介绍离散对象之间的函数关系

函数(function)定义

- 如果X到Y的二元关系f⊆X×Y，对于每个x∈X，都有唯一的y∈Y，使得<x,y>∈f，则称f为X到Y的**函数**，记做：**f:X→Y**
- 当$X=X_1\times\ldots\times X_n$时，称f为n元函数
- 函数也称作映射(mapping)或变换(transformation)
- 函数是特殊的关系：

① 前域和定义域重合；

② 单值性：<x,y>∈f∧<x,y'>∈f→y=y'

函数特殊表示法

- 由于函数的单值性
- 表示为：**y=f(x)**
- 称x为**自变元**，y为函数在x处的**值**
- y为x的**像点**，x为y的**源点**（基于映射）
- 不满足单值性的关系不适合这种表示法
- <x,y1>和<x,y2>都属于关系R，y1≠y2，则不能用y1=R(x)这样的表示法，否则y2=R(x)无法区分

函数的例子

- 任意集合A上的相等关系E_A为一函数，称为恒等函数(identical function)，也表示为I_A
- 自然数集合上的二倍关系为一函数，f:N→N，**y=2x**
- 正整数集合上的整除关系**不是**函数，因为2|4，2|8，不满足单值性
- X≠∅时，空关系∅不是函数，当X＝∅时，空关系∅是函数，称作空函数
- 自然数加法Add:N×N→N，**$y=x_1+x_2$**，为自然数集上的二元函数

函数的规定方法

- **列表法**
- 将函数包含的所有序偶排成一个表
- **图表法**
- 用平面直角坐标系上的点集合表示函数
- **解析法**
- 采用算术表达式或者其它命名式表示函数
- **递归定义函数**

归纳定义和递归定义

- 作为关系和集合，函数也可以采用归纳定义方法来进行定义：
- 函数初值定义
- 函数调用自身部分的定义
- 已经做过一些介绍
- 如字符串长度的函数
- len(空串)=0；
- len(A)=len(substr(A,2))+1

函数的相等和包含

- $f:A \to B$，$g:C \to D$
- 如果A=C，B=D，且对每个$x \in A$，都有：
- $f(x)=g(x)$，则函数**f等于g**，记为**$f=g$**
- 如果$A \subseteq C$，B=D，且对每个$x \in A$，都有：
- $f(x)=g(x)$，则函数**f包含于g**，记为**$f \subseteq g$**

函数的个数

- 如果**$|X|=m$**，**$|Y|=n$**，则$\{f|f:X \to Y\}$的基数为**n^m**，共有n^m个X到Y的函数
- 从n个元素当中取m个允许重复的排列，共有n^m个
- X到Y的全体函数集合表示为**Y^X**

定义域子集的映象(image)

- $f:X \to Y$，$A \subseteq X$，将$f'(A)$称作A的**映象**定义为：
- $f'(A)=\{y|\exists x(x \in A \wedge y=f(x))\}$
- 映象f'是$\rho(X)$到$\rho(Y)$的函数
- $f'(\varnothing)=\varnothing$
- $f'(X)=Ran(f)$,
- $f'(\{x\})=\{f(x)\}(x \in A)$

映象函数的特性

- 设$f:X \to Y$，对任意$A \subseteq X$, $B \subseteq X$
- $f'(A \cup B) = f'(A) \cup f'(B)$
- $f'(A \cap B) \subseteq f'(A) \cap f'(B)$
- $f'(A) - f'(B) \subseteq f'(A - B)$
- 存在$x1 \neq x2$但是$f(x1)=f(x2)$

离散数学：集合论：函数合成

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

函数的合成

- 设$f:X \to Y$, $g:Y \to Z$，那么作为关系的合成$f^\circ g$是一个X到Z的**函数**
- 先证明**$Dom(f^\circ g)=X$**
- 对任意$x \in X$，有$y \in Y$，使$<x,y> \in f$；对这个y，有$z \in Z$，使$<y,z> \in g$，因此有$<x,z> \in f^\circ g$，所以$x \in Dom(f^\circ g)$
- 再证明**$f^\circ g$的单值性**
- 设对x有z_1,z_2，使$<x,z_1> \in f^\circ g, <x,z_2> \in f^\circ g$
- 也就是有y_1,y_2，使$<x,y_1> \in f, <y_1,z_1> \in g, <x,y_2> \in f, <y_2,z_2> \in g$
- 因为f是函数，所以$y_1=y_2$，又g是函数，所以$z_1=z_2$

函数合成的习惯记法

- 习惯上f(x)和g(x)的合成，记做g(f(x))
- 所以函数合成也会按照关系合成的相反顺序记做g°f

函数合成运算的性质

- 函数合成满足结合律，不满足交换律
- 函数f的n次迭代：f^n
- $f°E_X=E_Y°f=f$
- 对于$f^2=f$，称作等幂函数

离散数学：集合论：特殊函数类

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

单射函数(injection)

- 如果任意$x_1≠x_2$有$f(x_1)≠f(x_2)$
- 也称作一对一的函数
- 如果f和g都是单射函数，则其合成g°f也是单射函数
- $x_1≠x_2 ⇒ f(x_1)≠f(x_2)⇒g(f(x_1))≠g(f(x_2))$
- 如果g°f是单射函数，则f是单射函数
- 反证法，如果f不是单射则g°f也不会是单射

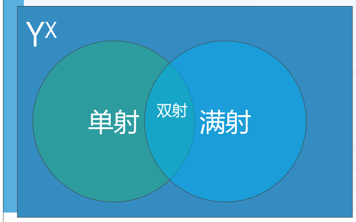
满射函数(surjection)

- 如果任意y都有x使得y=f(x)，即Ran(f)=Y
- 也称作“映上的”函数
- 如果f和g都是满射函数，则其合成g°f也是满射函数
- 如果g°f是满射函数，则g是满射函数
- 反证法，如果g不是满射函数， g°f也不会是满射函数

双射函数(bijection)

- 如果f既是单射函数又是满射函数，称作双射函数
- 也称作“一一对应”
- 如果f和g都是双射函数，则其合成g°f也是双射函数
- 如果g°f是双射函数，则f是单射函数，g是满射函数
- 容易由前面的定理证明

特殊函数类



逆函数(inverse function)

- 函数作为关系，可以求逆，但是$f^{\sim}$是否函数？
- 如果f不是单射，则$f^{\sim}$无法满足单值性
- 如果f不是满射，则$Dom(f^{\sim})\neq Y$
- 所以只有双射函数存在逆函数
- 双射函数f的逆函数记做f^{-1}，也是双射函数，称f是可逆的

逆函数的性质

- $(f^{-1})^{-1}=f$
- $f^{-1}\circ f=E_X$
- $f\circ f^{-1}=E_Y$
- 两个可逆函数f,g的合成：
- $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

逆函数

- 对于非双射函数，也存在类似逆函数的对应函数
- **左逆函数**(left inverse)
- 如果$g\circ f=E_X$，则称g为f的左逆函数
- f有左逆函数当且仅当f是单射函数
- **右逆函数**(right inverse)
- 如果$f\circ g=E_Y$，则称g为f的右逆函数
- f有右逆函数当且仅当f是满射函数
- **f可逆**当且仅当f既有左逆函数，又有右逆函数，而且左逆函数和右逆函数相等