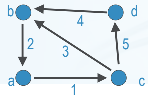
离散数学：图论：图的矩阵表示

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

邻接矩阵(adjacency matrix)

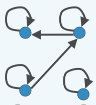
- 无重边的有向图G=<V,E>，其**邻接矩阵**A[G]定义为：
- $a_{ij}=1$, 当$<v_i,v_j>\in E$
- $a_{ij}=0$, 当$<v_i,v_j>\notin E$
- 是一个|V|×|V|矩阵，表示顶点邻接关系

	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	1	0	0	0
c	0	1	0	1
d	0	1	0	0

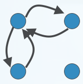


邻接矩阵(adjacency matrix)

- 回顾**关系图**和**关系矩阵**的表示：
- 对角线元素为1，表示环的存在（**自反关系**）
- 矩阵对称，表示双向边（**对称关系**）



$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

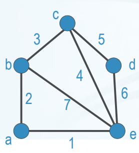
邻接矩阵的运算

- 顶点的**度**
- 出度：对应**行**的和
- 入度：对应**列**的和
- 关于**拟路径**
- 邻接矩阵自乘L次：A^L
- 则乘积结果矩阵中每个分量$a_{ij}^{(L)}$的含义为G中顶点v_i到v_j的长度为L的**拟路径条数**

关联矩阵（简单无向图）

- 表示**顶点和边**的关联关系，n*m矩阵
- 通过矩阵的**秩**来判定图的连通分支个数

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	1	0	0	0	0	0
b	0	1	1	0	0	0	1
c	0	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	1	0
e	1	0	0	1	0	1	1



路径矩阵walk matrix

- 图G=<V,E>的邻接矩阵A
- $A^{(m)}=A\wedge A\wedge \ldots \wedge A$
- **路径矩阵**$B=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee \ldots \vee A^{(|V|)}$
- B的每个分量b_{ij}表示v_i到v_j**是否有**路径
- **可达性矩阵**
- $P=I\vee B$，I是n*n的单位矩阵
- 加上顶点的自身可达性

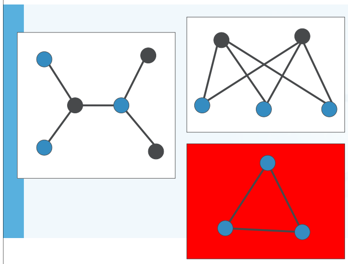
离散数学：图论：二分图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

二分图(bipartite graph)

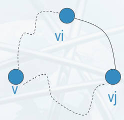
- 满足如下条件的**无向图**$G=<V,E>$
- 有非空集合X,Y：$X\cup Y=V$, $X\cap Y=\varnothing$，且
- 每个$\{v_i,v_j\}\in E$，都有：
- $v_i\in X\wedge v_j\in Y$，或者，$v_i\in Y\wedge v_j\in X$
- 可以用$G=<X,E,Y>$表示二分图
- 如果X,Y中任意两个顶点之间都有边，则称为**完全二分图**complete bipartite graph
- 完全二分图可以记作$K_{|X|,|Y|}$

二分图例子



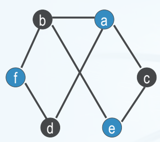
二分图的等价条件

- G至少要有两个顶点，而且G中所有回路的长度都是偶数
- 必要性易得
- 充分性可以通过**构造**X，Y两个集合证明
- 任意取顶点v，取$V_1=\{v_i \mid v_i$与v的距离为偶数$\}$，$V_2=V-V_1$
- 证明V_1,V_2内部顶点间**没有边**（反证法）
- 如果有边$\{v_i,v_j\}\in E$，$v_i,v_j\in V_1$
- 那么v到v_i，v_j距离是偶数，$v\to v_i\to v_j\to v$这个回路的长度是奇数，和条件矛盾，V_2同理
- 所以G是个二分图$<V_1,E,V_2>$



二分图应用：分组交谈

- 出席国际会议的成员a,b,c,d,e,f
  a:汉语, 法语, 日语
  b:德语, 日语, 俄语
  c:英语, 法语
  d:汉语, 西班牙语
  e:英语, 德语
  f:俄语, 西班牙语



- 如果分为两组
- 是否可能组内成员不能直接交谈？
- 回路长度皆为偶数，是二分图

离散数学：图论：二分图的匹配

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

匹配(matching)

- 资源匹配，工作安排等
- 将需要配对的两种对象分别作为X，Y
- 求配对关系，或者给顶点和边赋权，求某种条件下的最优分配问题
- 可以用二分图来表示解决匹配问题

二分图匹配

- 将E的子集M称作一个**匹配**，如果M中的任意两条边都**没有公共**端点
- 边数最多的匹配称作**最大匹配**maximal matching
- 如果X(Y)中的所有的顶点都出现在匹配M中，则称M是**X(Y)-完全匹配**perfect matching
- 如果M既是X-完全匹配，又是Y-完全匹配，称M是**完全匹配**

匹配的应用

- 最大匹配和完全匹配的寻找和判定，有广泛的应用背景
- 工作安排问题：教师和课程的一一安排
- 二分图：G=<U,E,V>，其中U是教师集合，V是课程集合
- E中的边<u,v>表示某位教师u可以上课程v
- 需要求**最大匹配**，使得每门课程有人教，每人都有课上。

最大匹配：匈牙利算法

① **任意**取一个**匹配**M（可以是空集或只有一条边）

② 令S是**非饱和**点（尚未匹配的点）的集合

③ 如果S=∅，则M已经是最大匹配

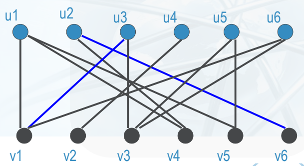
④ 从S中取出一个非饱和点u_0作为起点，从此起点走**交错路**（交替属于M和非M的边构成的极大无重复点通路或回路）P

⑤ 如果P是一个**增广路**（P的终点也是非饱和点），则令M=M⊕P=(M-P)∪(P-M)

⑥ 如果P都不是增广路，则从S中去掉u_0，转到step**3**

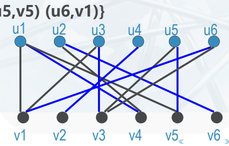
最大匹配的教师课程问题

- M1={(u2,v6) **(u3,v1)**}, S1={u1,u4,u5,u6}, 选择u1
- 增广路P1={(u1,v1) **(v1,u3)** (u3,v3)}
- M2=M1⊕P1={(u1,v1) (u2,v6) (u3,v3)}, S2={u4,u5,u6}, 选择u4
- 增广路P2={(u4,v2)}



最大匹配的教师课程问题

- M3=M2⊕P2={**(u1,v1)** (u2,v6) **(u3,v3)** (u4,v2)}, S3={u5,u6}, 选择u5
- 增广路P3={(u5,v3) **(v3,u3)** (u3,v1) **(v1,u1)** (u1,v4)}
- M4=M3⊕P3={(u1,v4) (u2,v6) **(u3,v1)** (u4,v2) **(u5,v3)**}, S4={u6}, 选u6
- 增广路P4={(u6,v1) **(v1,u3)** (u3,v3) **(v3,u5)** (u5,v5)}
- 最后M={(u1,v4) (u2,v6) (u3,v3) (u4,v2) (u5,v5) (u6,v1)}
- 是最大匹配，也是完全匹配
- |X| ≠ |Y|的二分图一定没有完全匹配
- **正则**的|X|=|Y|的二分图一定有完全匹配



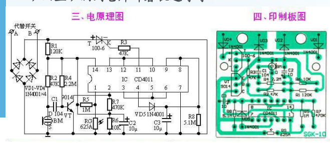
离散数学：图论：平面图

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

平面图问题

- 图的画法可以有很多种
- 问题：一个图是否可以画成任意两条边都不相交的样子？
- 实际应用：印刷电路板

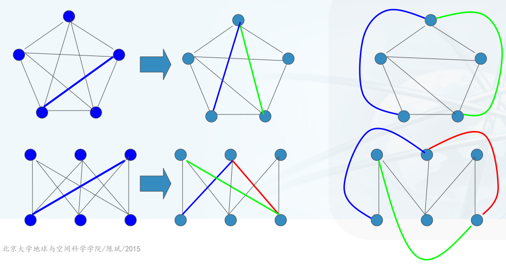
矿山里矿洞到仓库部署轨道等等



平面图(planar graph)的定义

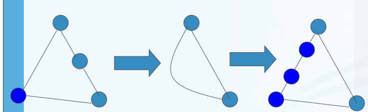
- 如果无向图G可以在一个平面上图示出来，并且各边**仅在顶点处相交**，称作平面图，否则是非平面图
- K_5和$K_{3,3}$都不是平面图
- 它们都是正则图
- 任意去掉一条边，都成为平面图
- K_5是顶点数最少的非平面图
- $K_{3,3}$是边数最少的非平面图

K_5及$K_{3,3}$



平面图等价条件

- G或者G的子图作任何**同胚操作**后得到的图均不能以K_5及$K_{3,3}$为子图(1930,Kuratowski)
- **同胚操作**就是在原图的边上增加或者删除二度节点

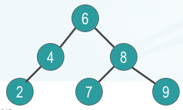


离散数学：图论：树

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

树(Tree)

- **连通无回路**的无向图称为树tree
- 树中的悬挂点称作**树叶**leaf
- 非树叶节点称作**分支点**branched node
- 仅有单个孤立节点的树称作**空树**null tree
- 每个连通分支都是树的图称作**森林**forest
- 树是森林



树的性质

- 是简单图
- 是二分图
- 是平面图
- 顶点数比边数多1，否则必然出现回路
- 删去任意一条边，即不连通
- （否则某两端点之间有两条通路，形成回路）
- 任意两个不同顶点之间仅有一条通路

生成树(spanning tree)

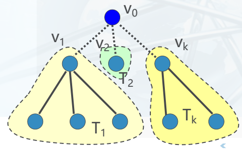
- 如果图T是G的**生成子图**，且**T是树**
- 任意连通图G都至少有一棵生成树
- 构造法证明：
- 如果G有回路，则删去回路上的一条边，然后继续构造直到没有回路

根树(rooted tree)

① 一个孤立节点v_0是根树，v_0称为树根

② 如果$T_1,T_2,\ldots T_k$是根树，其树根分别是$v_1,v_2,\ldots,v_k$，则

- $V=V(T_1) \cup V(T_2) \cup \ldots \cup V(T_k) \cup \{v_0\}$；
- $E=E(T_1) \cup E(T_2) \cup \ldots \cup E(T_k) \cup \{v_0,v_1\} \cup \{v_0,v_2\} \ldots \cup \{v_0,v_k\}$
- $T=<V,E>$也是根树，v_0称为树根



根树rooted tree

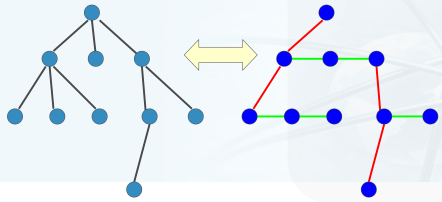
- T_n称为T的子树subtree，树根称为父节点parent，而子树的树根称为子节点child
- $v_1,v_2,\ldots,v_k$互称兄弟节点sibling
- 根树中每个节点都是某个子树的根
- n元树
- 每个节点都至多有n个子节点的根树称作**n元树**
- 对于子节点规定了次序的n元树称作**n元有序树**
- 最常用的n元树是**二元树**（左/右子节点）

离散数学：图论：树的应用

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

二元有序树可以表示任何n元有序树

- 左子节点表示**第一个**子节点
- 右子节点表示**下一个**兄弟节点

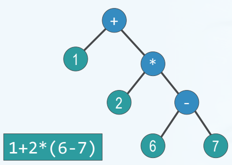


二元树的遍历

- 遍历：以某种次序访问所有节点
- 按照树根访问的先后，分为三种次序：
- **先根**次序：根、左子树、右子树
- **中根**次序：左子树、根、右子树
- **后根**次序：左子树、右子树、根

树的应用：表达式树

- 分支节点为运算符
- 树叶为运算数



排序搜索树

- 左子树的节点值都小于根
- 右子树的节点值都大于根
- 排序树的**构造**、**平衡优化**、**搜索**