

# 北京大学本科课程试卷(离散数学)

2013~2014 学年第一学期末 (2014.1.6)

注意：请将所有解答写在考试专用纸上，写在本试卷的解答无效！

## 一、 判断题 (每题 2 分, 共 20 分)

- 1、如果命题公式  $A$  是可满足式, 那么  $\neg A$  也是可满足式; (错误)
- 2、命题演算形式系统 PC 上的公理都是永真式; (正确)
- 3、主合取范式中的极大项具有唯一的成真赋值; (错误)
- 4、空集的幂集仍然是空集; (错误)
- 5、非空集合上的相等关系是自反、反自反、对称、反对称和传递的; (错误)
- 6、正则二分图总能得到完全匹配; (正确)
- 7、函数单射和满射的性质对于合成运算都是封闭的; (正确)
- 8、代数结构中的幺元如果存在, 则是唯一的; (正确)
- 9、正则表达式  $a^*(c|d)^*b^*$  所描述的语言是  $\{a^m(cd)^nb^k \mid m,n,k \in N\}$ ; (错误)
- 10、一个语言  $L$  如果能被有限状态机  $M$  所识别, 那么  $L$  的补语言  $V^*-L$  也一定能被某个有限状态机  $M'$  所识别。 (正确, 只需将  $M$  中的接受状态  $Y$  作为  $M'$  的拒绝状态,  $Y'=S-Y$  即得  $M'$ )

## 二、 名词解释与简答 (每题 6 分, 共 30 分)

- 1、定义一个逻辑连接词  $p\#q$  为  $\neg(p \wedge q)$ , 请证明  $\{\#\}$  是一个功能完备集; (选定连接词完备集  $\{\neg, \wedge\}$ , 用  $\#$  来表示此完备集中的所有连接词)
- 2、平面图; 3、商集; 4、哥德尔编码; 5、短语结构语法及分类。(参见课件中的定义)

## 三、 综合题 (每题 10 分, 共 50 分)

- 1、有三段论“所有人都是要死的; 苏格拉底是人; 所以苏格拉底是要死的”, 请形式化为谓词公式, 并证明其为真。

$A(x)$ :  $x$  是人;  $B(x)$ :  $x$  要死的;  $t$ : 苏格拉底

形式化为:  $(\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(t)) \rightarrow B(t)$

逻辑等价式:  $(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$ , 永真式:  $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$

证明过程:  $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (A(t) \rightarrow B(t))$  公理,

根据逻辑等价式变换为  $(\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(t)) \rightarrow B(t)$

- 2、有集合  $A=\{a, b, c\}$ ,  $A$  上的 4 个等价关系 (对应划分为  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ,  $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ ,  $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ ,  $\{\{a, b, c\}\}$ ) 及集合交运算  $\cap$  构成代数结构  $S$ ; 另有集合  $A'=\{x, y\}$ ,  $A'$  的幂集及集合交运算  $\cap$  构成代数结构  $S'$ , 请指出两个代数结构上的零元、幺元, 并证明两个代数结构同构。

$S$  上的零元为相等关系, 幺元为全关系;

$S'$  上的零元为空集, 幺元为  $A'$ ;

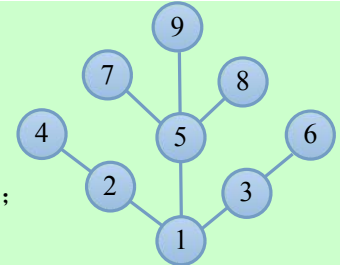
构造双射函数  $h: \mathfrak{R} \rightarrow \rho(A')$ ，定义为：

$h(\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle) = \phi$ ;  $h(\langle a, a \rangle, \{b, c\} \times \{b, c\}) = \{x\}$ ;  $h(\langle c, c \rangle, \{a, b\} \times \{a, b\}) = \{y\}$ ;

$h(\{\{a, b, c\} \times \{a, b, c\}\}) = \{x, y\}$

可用列举穷举法证明： $h(R_1 \cap R_2) = h(R_1) \cap h(R_2)$ ，故两个代数结构同构。

3、序关系  $\langle A, \leq \rangle$  的哈斯图如右图所示，请写出下列内容：



- (1) 写出所有的最长链，其长度是多少？
- (2) 写出所有的最长反链，其长度是多少？
- (3) 写出  $A$  的一个单元数最少的划分  $\pi$ ，其每个单元都是一个反链；
- (4) 写出上述划分  $\pi$  所对应的  $A$  上的等价关系  $R$ 。

(1)  $\{1, 2, 4\}, \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 9\}, \{1, 5, 8\}, \{1, 3, 6\}$  长度为 3；

(2)  $\{2, 7, 9, 8, 3\}, \{2, 7, 9, 8, 6\}, \{4, 7, 9, 8, 3\}, \{4, 7, 9, 8, 6\}$  长度为 5；

(3)  $\{\{1\}, \{2, 5, 3\}, \{4, 7, 9, 8, 6\}\}$  (或者  $\{\{1\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 7, 9, 8, 3\}\}$  等)；

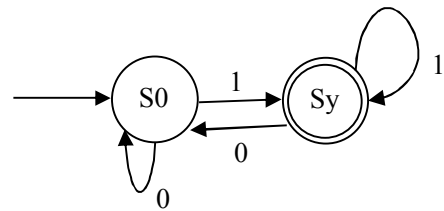
(4)  $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \dots, \dots, \langle 8, 6 \rangle, \langle 6, 8 \rangle\}$

4、字符集  $V = \{0, 1\}$ ，将  $V$  上的字符串看作为自然数的二进制表示，定义  $L$  为全体奇数的集合， $L$  是正则集，请写出：

- (1) 描述正则集  $L$  的正则表达式；
- (2) 识别此正则集  $L$  的有限状态机  $M$ ，并画出状态图；
- (3) 识别此正则集  $L$  的图灵机  $T$ 。

(1)  $(0|1)^*1$

(2) 状态  $S_0$  和  $S_y$ ，状态的转移参看状态图：



(3)  $\langle S_0, 0, 0, S_0, R \rangle, \langle S_0, 1, 1, S_y, R \rangle, \langle S_0, B, B, S_1, L \rangle, \langle S_1, 0, 0, S_N, N \rangle, \langle S_1, 1, 1, S_y, N \rangle, \langle S_1, B, B, S_N, N \rangle$

5、请结合你熟悉的专业课知识论述离散数学基本概念在其中的应用。

