

北京大学本科课程试卷(离散数学)

2014~2015 学年第一学期末 (2015.1.15)

注意：请将所有解答写在考试专用纸上，写在本试卷的解答无效！

一、 判断题 (每题 2 分, 共 20 分)

- 1、如果命题公式 A 是永真式, 那么 $\neg A$ 不是永假式, 而是可满足式; (错误)
- 2、集合归纳定义中的基础条款和归纳条款必须保证毫无遗漏产生集合中所有成员; (正确)
- 3、主析取范式中的极小项只有唯一的成假赋值; (错误)
- 4、空集 $\phi \in \{\phi\}$ 和 $\phi \subseteq \{\phi\}$ 同时成立; (正确)
- 5、两个同构的图, 其排序后的度数序列有可能不同; (错误)
- 6、正则二分图总能得到完全匹配; (正确)
- 7、只有双射函数存在逆函数; (正确)
- 8、代数结构 $\langle \mathbb{N}, \times \rangle$ 中, 自然数 0 是零元, 1 是幺元; (正确)
- 9、 $\{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N} \wedge m \leq 100\}$ 是正则语言; (正确)
- 10、有限状态机对于任何输入都能在有限步骤内停机。 (正确)

二、 名词解释与简答 (每题 6 分, 共 30 分)

- 1、举例说明 $\forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\exists x \forall y P(x, y)$ 两个公式在逻辑含义上的区别;
- 2、正则图; 3、划分; 4、有限状态机; 5、归纳定义。(参见课件中的定义)

三、 综合题 (每题 10 分, 共 50 分)

- 1、请写出根树的归纳定义, 并用归纳原理证明根树的边数恰比节点数少 1。

基础条款: $T = \langle \{v_0\}, \{\} \rangle$ 是根树, v_0 是树根;

归纳条款: 如果 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 是根树, $v_1, v_2, \dots, v_n$ 是对应的树根, 那么 $V = \{v_0\} \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$, $E = \{\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle, \dots, \langle v_0, v_n \rangle\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, $T = \langle V, E \rangle$ 也是根树, v_0 是树根

终极条款: (略)。

证明:

归纳基础: $T = \langle \{v_0\}, \{\} \rangle$, 节点数 1, 边数 0, 成立。

归纳过程: 对于根树 $T_1, T_2, \dots, T_n$, 结论均成立 $|V_i| = |E_i| + 1$, 那么:

$$|V| = |V_1| + |V_2| + \dots + |V_n| + 1 = |E_1| + 1 + |E_2| + 1 + \dots + |E_n| + 1 + 1$$

$$= (|E_1| + |E_2| + \dots + |E_n| + n) + 1 = |E| + 1$$

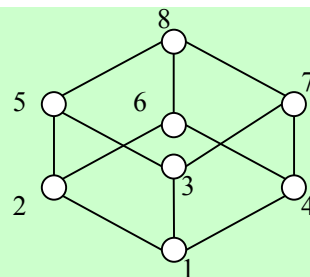
所以对于一切根树, 边数恰比节点数少 1。

- 2、有限集合 A 上的等价关系全体及集合交运算构成代数结构, 请指出

(1) 交运算是否满足结合律、交换律; (满足)

(2) 如果有的话, 请指出 S 中的左右零元、零元、左右幺元、幺元以及载体元素的左右逆元、逆元, 并说明理由, 没有的也指出理由。(相等关系是零元, 全关系是幺元, 只有全关系存在逆元。)

3、序关系 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如右图所示，请写出下列内容：



- (1) 写出所有的最长链，其长度是多少？
- (2) 写出所有的最长反链，其长度是多少？
- (3) 写出 A 的一个划分，其每个单元都是一个反链；
- (4) 写出划分所对应的 A 上的等价关系 R 。

(1) $\{1,2,5,8\}, \{1,2,6,8\}, \{1,3,5,8\}, \{1,3,7,8\}, \{1,4,6,8\}, \{1,4,7,8\}$

(2) $\{2,3,4\}, \{5,6,7\}$

(3) $\{\{1\}, \{2,3,4\}, \{5,6,7\}, \{8\}\}$

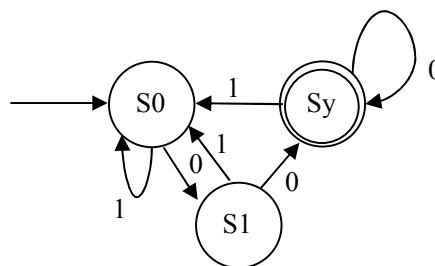
(4) $\{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 7,7 \rangle, \langle 5,6 \rangle, \langle 6,5 \rangle, \langle 6,7 \rangle, \langle 7,6 \rangle, \langle 5,7 \rangle, \langle 7,5 \rangle, \langle 8,8 \rangle \}$

4、字符集 $V=\{0,1\}$ ，将 V 上的字符串看作为自然数的二进制表示，定义 L 为全体可被 4 整除的数集合， L 是正则集，请写出：

- (1) 描述正则集 L 的正则表达式；
- (2) 识别此正则集 L 的有限状态机 M ，并画出状态图；
- (3) 识别此正则集 L 的图灵机 T 。

(1) $(0|1)^*00$

(2) 状态 S_0, S_1 和 S_y ，状态的转移参看状态图：



(3) $\langle S_0, 0, 0, S_0, R \rangle, \langle S_0, 1, 1, S_0, R \rangle, \langle S_0, B, B, S_1, L \rangle, \langle S_1, 0, 0, S_2, L \rangle, \langle S_1, 1, 1, S_N, N \rangle, \langle S_1, B, B, S_N, N \rangle, \langle S_2, 0, 0, S_y, N \rangle, \langle S_2, 1, 1, S_N, N \rangle, \langle S_2, B, B, S_N, N \rangle$

5、请结合你熟悉的专业课知识论述离散数学基本概念在其中的应用。

