

北京大学本科课程试卷(离散数学)

2015~2016 学年第一学期末 (2016.1.14)

注意：请将所有解答写在考试专用纸上，写在本试卷的解答无效！

一、 简答题 (每题 6 分, 共 30 分)

1, Minecraft 中的红石系统可以搭建出所有真值函数的电路, 请写出红石系统基本方块对应的逻辑联结词, 并证明它是功能完备集。

红石系统基本方块包括“火把”对应否定联结词, “线路并联”对应吸取联结词, 这两个联结词可以表示功能完备集 $\{\neg, \rightarrow\}$, 所以也是功能完备集。

2, 请归纳无限集合的特有性质, 并举例说明。

无限集合主要的特性是其部分可以跟整体建立一一对应的关系, 如自然数中的偶数, 而有限集合就不具备这种特性。

3, 请分析微信好友关系具有哪些性质, 是否等价关系或序关系?

微信好友关系具有自反、对称性质, 由于不具备传递性, 所以不是等价关系, 也不是序关系。

4, 树是二分图, 那么二分图都是树么? 为什么?

二分图并不都是树, 树是无回路的连通图, 但有二分图具有回路, 所以不是树。

5, 请简述识别和判定的概念, 什么样的语言是不可识别的?

形式语言识别是属于语言的字符串在有限步骤内停机并接受, 不属于语言的字符串在有限步骤内停机并拒绝或者永不停机; 判定则是排除了永不停机, 属于或者不属于语言的字符串都能在有限步骤内停机, 并给出接受或拒绝的结论。

如果一个语言只是可识别, 而不是可判定的话, 那么它的补语言就是不可识别的。

二、 综合题 (每题 15 分, 共 60 分)

1, 请论述形式系统中的定理证明和形式语言中的句子语法分析之间存在的相似性, 举例说明, 并指出两者均包含的不可判定问题。

要点: 形式系统中的定理证明是为命题找到一个由公理开始的公式序列, 序列中每个公式要么是公理, 要么是前面的公式通过推理规则得到。形式语言中的句子语法分析则是为句子找到一个由句子开始符号 v_0 为根的语法导出树, 树中包含了导出合法句子所用到的所有产生式及导出顺序。两者相似之处在于都要为真命题或合法句子找到有限长度的证据, 即从初始的公理或句子开始符号 v_0 出发, 在有限步骤内利用推理规则或产生式得到定理和句子。

但哥德尔不完备定理指出, 一个包含自然数定义的形式系统, 如果不存在自相矛盾, 则必然存在不可证明的命题; 同样, 由于停机问题不可解, 在 Ω 型语言中, 也必然存在无法进行语法分析的合法句子。

2, 空间聚类是通过元素之间的空间距离定义的等价关系, 在空间上相互之间挨得较近的元素属于同一个等价类, 请写出一种空间聚类 xRy 的定义, 并证明 R 是等价关系。

要点： $d(x,y)$ 表示 xy 之间的空间距离，而 r 是判定聚类的距离阈值。那么 xRy 就可以递归定义为： $d(x,y) \leq r$ ，或者存在 z 使得 xRz 且 zRy 。

3，请分别以命题、集合、字符串、自然数作为载体元素，定义 4 个包含 1 个二元运算的代数结构。请：1) 指出每个代数结构中的零元、幺元，运算的可交换、结合性质；2) 分析 4 个代数结构之间可能存在的同态或同构映射。

要点：

载体集合	运算	零元	幺元	可交换	可结合
命题	合取	0	1	Y	Y
$\rho(A)$	交集	空集	A	Y	Y
字符串	连接	-	空串	N	Y
自然数	加法	-	0	Y	Y

命题代数结构和集合代数结构之间存在同构映射，字符串代数结构和自然数代数结构之间存在同态映射。

4，如果以列表（或数组）表示纸带，以字典数据结构 $r[(s,a)]=(s2,a2,d)$ 保存规则，请用算法语言伪代码设计一个通用图灵机的实现算法。

要点：

`status= s0 //初始状态`

`index= 1 //初始纸带格子下标`

`while status not in HaltStatusList: //未进入停机状态的话就执行规则`

`(status, tape[index], d)= rules[(status, tape[index])] //按照规则改变状态和字符`

`tape_index+= d //移动读写头的位置`

三、 建议题（10 分）

请结合你所在专业的特点，对本课慕课加翻转课堂的教学形式及内容，发表看法及提出建议。

（略）