

北京大学本科课程试卷 (离散数学)

2016~2017 学年第一学期末 (2017.1.5)

注意：请将所有解答写在考试专用纸上，写在本试卷的解答无效！

一、 简答题 (每题 6 分，共 30 分)

- 1, 举例说明 $\forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\exists x \forall y P(x, y)$ 两个公式在逻辑含义上的区别与联系。
(见课件中重要的谓词演算永真式)。
- 2, 请形式化表达罗素悖论的核心内容，并分析概括公理是如何避免这种悖论的。
(见课件中集合论三大基本原理，以及罗素悖论的内容)。
- 3, 什么是等价关系？请举一个等价关系的例子，并写出对应的划分。
(见课件中等价关系的定义，和划分定义)。
- 4, 什么是平面图？请画出顶点数最少和边数最少的非平面图。
(见课件中平面图的定义，以及最小的非平面图)。
- 5, 什么是哥德尔数？请简述哥德尔数的作用，并试举一个哥德尔数的例子。
(见课件中的定义)

二、 综合题 (每题 15 分，共 60 分)

- 1, 请给出根树 (rooted tree) 的归纳定义，并用归纳原理证明根树中，任意两个顶点之间恰有 1 条通路。

要点：根树定义参考课件。

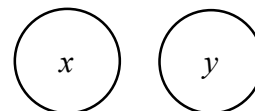
归纳原理证明，首先孤立结点的根树，结论成立；然后在归纳条款中， k 个根树内部任意两个顶点之间恰有 1 条通路，另外增加了 k 条边和 1 个根节点，这样：

- 1) 两个顶点中 1 个是根节点，另一个顶点在某个根树中；
- 2) 两个顶点中 1 个在一个根树中，另一个在另一个根树中；
- 3) 两个顶点都在同一个根树中。

这三种情况都是恰有 1 条通路。按照归纳原理得证。

- 2, 区域连接算子 (RCC: Region Connection Calculus) 是一个代数系统，从定义的“区域 Region”对象和“连接 Connects”关系，及两条描述连接关系自反和对称的公理出发，采用一阶谓词逻辑定义了一系列几何对象之间的拓扑关系。例如分离关系 (Disconnects) 定义为：

$$DC(x, y) \equiv_{def} \neg C(x, y)$$



表示两个对象 x 、 y 在空间上分离的关系。

请用自然语言解释下列定义的一系列拓扑关系的含义，并图示之：

- $P(x, y) \equiv_{def} \forall z[C(z, x) \rightarrow C(z, y)]$
- $PP(x, y) \equiv_{def} P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$
- $O(x, y) \equiv_{def} \exists z[P(z, x) \wedge P(z, y)]$
- $EC(x, y) \equiv_{def} C(x, y) \wedge \neg O(x, y)$
- $TPP(x, y) \equiv_{def} PP(x, y) \wedge \exists z[EC(z, x) \wedge EC(z, y)]$

要点: $P(x,y)$: x 是 y 的一部分, 可以包含相等的情况; $PP(x,y)$: x 是 y 的一部分, 排除了相等的情况; $O(x,y)$: xy 内部有重叠; $EC(x,y)$: x,y 只在边界处重叠, 内部不重叠; $TPP(x,y)$: x 在 y 的内部, 同时 xy 在边界处重叠。

3, 字符集 $V = \{0,1\}$, 将 V 上的字符串看作为自然数的二进制表示, 定义 L 为全体能被 4 整除的数集合, L 是正则集, 请写出:

- (1) 描述正则集 L 的正则表达式;
- (2) 识别此正则集 L 的有限状态机 M , 并画出状态图;
- (3) 识别此正则集 L 的图灵机 T 。

。

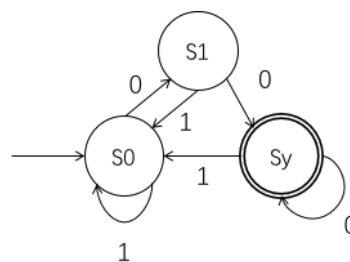
要点:

(1) $(0|1)^*00$;

(2) 状态 S_0, S_1, S_y ;

(3) 图灵机 $\langle S_0, 0, 0, S_1, R \rangle; \langle S_0, 1, 1, S_0, R \rangle; \langle S_1, 0, 0, S_2, R \rangle; \langle S_2, B, B, S_y, N \rangle; \langle S_1, 1, 1, S_0, R \rangle; \langle S_2, 0, 0, S_2, R \rangle; \langle S_2, 1, 1, S_0, R \rangle; \langle S_0, B, B, S_n, N \rangle; \langle S_1, B, B, S_n, N \rangle$

。



4, 有限集合 A 上的二元关系全体及关系合成运算构成代数结构:

$$S = \langle \{R | R \subseteq A \times A\}, \circ \rangle$$

, 请指出: (1) 合成运算是否满足结合律、交换律; (2) 如果有的话, 请指出 S 中的左右零元、零元、左右幺元、幺元以及载体元素的左右逆元、逆元, 并说明理由, 没有的也指出理由。

要点: (1) 满足结合律, 不满足交换律

(2) 零元是空关系, 幺元是相等关系, 每个关系的逆关系就是它的逆元。

三、 建议题 (10 分)

请结合你所在专业的特点, 对本课慕课加翻转课堂的教学形式及内容, 发表看法及提出建议。

(略)