

# 离散数学

## 03 / 形式系统中的命题与证明

陈斌 [gischen@pku.edu.cn](mailto:gischen@pku.edu.cn) 北京大学地球与空间科学学院

# 从逻辑等价谈起

## 逻辑等价式(logical equivalent)

- 当命题公式  $A \leftrightarrow B$  是重言式时，则称  $A$  逻辑等价于  $B$ ，记作  $A \vDash B$ ，称作逻辑等价式
- 也可以理解为公式  $A$  和公式  $B$  等值
- 逻辑等价体现了两个公式之间的一种关系：在任何赋值状况下它们都等值

- 逻辑等价式  $(A \vDash B)$  并不是一个命题公式
- 它表示的是两个命题公式  $A$ 、 $B$  之间的一种关系  
也就是  $A \leftrightarrow B$  这个命题公式是永真式  
或者说  $A$ 、 $B$  无论在任何赋值状况下等值
- 注意： $A \leftrightarrow B$  是命题公式，因为  $\leftrightarrow$  是逻辑联结词
- 如果把  $A \vDash B$  当作是一个做判断陈述句，要注意只有当  $A$ 、 $B$  都是确定的命题公式情况下，才能是命题。

# 逻辑蕴涵与推理

## 逻辑蕴涵式(logical implication)

- › 当命题公式 $A \rightarrow B$ 是重言式时，则称A逻辑蕴涵B，记作 $A \vDash B$ ，称作逻辑蕴涵式
- › 也可以理解为公式A的所有成真赋值都是公式B的成真赋值
- › 每个逻辑等价式可以看作两个逻辑蕴涵式，也就是说 $A \vDash B$ 也有 $A \vDash B, B \vDash A$   
A和B等值，所以 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$ 都是重言式
- › 逻辑蕴涵体现了两个公式AB之间的另一种关系：在任何赋值状况下只要A真，B都真

- › 同样可以理解为命题公式A、B之间的一种关系
- › 因为逻辑蕴涵体现了一种A、B的因果关联
- › 所以用于推理
- › A是B的原因，充分条件

# 逻辑蕴涵与推理

## 逻辑结果

- › 逻辑蕴涵经常会被推广为 $\Gamma \vdash B$ 的形式
- › 其中 $\Gamma$ 是一系列公式，表示 $B$ 是 $\Gamma$ 的**逻辑结果**
- › 即：使 $\Gamma$ 中每一个公式成真的赋值，都是公式 $B$ 的成真赋值
- › 即 $\Gamma$ 中的**所有公式的合取**逻辑蕴涵 $B$
- › 当 $\Gamma$ 中仅包含一个公式 $A$ 时，就是 $A \vdash B$ ；
- › 如果 $\Gamma$ 中不包含任何公式，记做 $\vdash B$ ，表示“ $B$ 永真”

- › 注意 $\Gamma$ 中有一系列公式的话，这些公式应该合取，并且跟合取的顺序无关
- ›  $\Gamma$ 中所有的公式都是 $B$ 的原因，而且这个充分条件缺一不可
- › 当然， $\Gamma \vdash B$ 成立的话，那么无论向 $\Gamma$ 中再添加多少个公式， $\Gamma \vdash B$ 也都还成立。
- › 如果从 $\Gamma$ 中去掉一个公式， $\Gamma \vdash B$ 还会成立吗？为什么？

# 形式系统、证明、定理

## 形式系统

- › 形式系统是一个**符号体系**
- › 系统中的概念由符号表示，推理过程即符号变换的过程
- › 以若干最基本的**重言式**作为基础，称作**公理**（axioms）
- › 系统内符号变换的依据是若干**确保由重言式导出重言式**的规则，称作**推理规则**（rules of inference）
- › 公理和推理规则确保系统内由**正确的前提**总能得到**正确的推理结果**

# 命题演算形式系统PC

- › 符号系统：严格定义的命题公式
  - › 公理：一组永真式
  - › 推理规则：一个逻辑蕴涵式
  - › 合理性：PC中的定理都是真理（永真式）
  - › 一致性：PC中不可能出现A和非A都是定理的情况
  - › 完备性：只要是真理（永真式），就一定是PC中的定理
  - › 合理性和完备性有什么区别？
- › **PC的推理规则**（A,B表示任意公式）
  - › **A, A→B / B**（**分离规则**）

# 抽象的形式系统

## 形式系统构造了一个符号串集合

- › 形式系统定义就是**符号串集合的构造性定义**
- › **符号体系**规定了符号串可能包含的字符（或字符的合法组合模式，词）  
如PC中的命题变元、常元和公式的定义
- › **公理**规定了几个集合中的符号串（或者这种符号串的模式）  
如PC中的公理，实质是公理模式
- › **推理规则**规定了从集合中已知符号串变换生成集合中其它符号串的方法  
如PC中的分离规则

- › 一个可以由一批基本符号串（公理）经过一组变换规则，生成一批又一批符号串的系统
- › 这样的系统有何意义？

# 证明及定理判定问题

- › PC中的证明是一个公式序列
- › 从公理出发，由推理规则产生新的定理，最后到达需要论证的公式
- › 证明体现了因果链条，这个链条上的所有真理由推理规则串起来。
- › 只有得到证明的公式，才是定理
- › 那么，所有的真理都能得到证明吗？
- › PC的情况如何？为什么？
- › 一个足够复杂的形式系统，如果它是一致的，那么必然不完备。
- › 这个是什么意思？

# 足够复杂的形式系统

