离散数学

03 / 形式系统中的命题与证明

陈斌 gischen@pku.edu.cn 北京大学地球与空间科学学院

从逻辑等价谈起

离散数学

逻辑等价式(logical equivalent)

- **当命题公式A↔B是重言式时，则称A逻辑等价于B，记作A ⊨ B，称作逻辑等价式**
- **也可以理解为公式A和公式B等值**
- **逻辑等价体现了两个公式之间的一种关系：在任何赋值状况下它们都等值**

A ⊨ B可以是一个命题吗？

- 逻辑等价式（A ⊨ B）并不是一个命题公式
- 它表示的是两个命题公式A、B之间的一种关系

  也就是A↔B这个命题公式是永真式

  或者说A、B无论在任何赋值状况下等值
- 注意：A　B是命题公式，因为　是逻辑联结词
- 如果把A ⊨ B当作是一个做判断陈述句，要注意只有当A、B都是确定的命题公式情况下，才能是命题。

逻辑蕴涵与推理

离散数学

逻辑蕴涵式(logical implication)

- 当命题公式$A \rightarrow B$是**重言式**时，则称A逻辑蕴涵B，记作$A \models B$，称作逻辑蕴涵式
- 也可以理解为公式A的所有成真赋值都是公式B的成真赋值
- 每个逻辑等价式可以看作两个逻辑蕴涵式，也就是说$A \dashv\vDash B$也有$A \models B, B \models A$

  A和B等值，所以$A \rightarrow B$和$B \rightarrow A$都是重言式
- 逻辑蕴涵体现了两个公式AB之间的另一种**关系**：在任何赋值状况下只要A真，B都真

- 同样可以理解为命题公式A、B之间的一种关系
- 因为逻辑蕴涵体现了一种A、B的因果关联
- 所以用于推理
- A是B的原因，充分条件

逻辑蕴涵与推理

离散数学

逻辑结果

- 逻辑蕴涵经常会被推广为Γ⊨B的形式
- 其中Γ是一系列公式，表示B是Γ的**逻辑结果**
- 即：使Γ中每一个公式成真的赋值，都是公式B的成真赋值
- 即Γ中的**所有公式的合取**逻辑蕴涵B
- 当Γ中仅包含一个公式A时，就是A⊨B；
- 如果Γ中不包含任何公式，记做⊨B，表示“B永真”

- 注意Γ中有一系列公式的话，这些公式应该合取，并且跟合取的顺序无关
- Γ中所有的公式都是B的原因，而且这个充分条件缺一不可
- 当然，Γ⊨B成立的话，那么无论向Γ中再添加多少个公式，Γ⊨B也都还成立。
- 如果从Γ中去掉一个公式，Γ⊨B还会成立吗？为什么？

形式系统、证明、定理

形式系统

- 形式系统是一个**符号体系**
- 系统中的概念由符号表示，推理过程即符号变换的过程
- 以若干最基本的重言式作为基础，称作**公理**（axioms）
- 系统内符号变换的依据是若干确保由重言式导出重言式的规则，称作**推理规则**（rules of inference）
- 公理和推理规则确保系统内由**正确的前提**总能得到**正确的推理结果**

命题演算形式系统PC

- 符号系统：严格定义的命题公式
- 公理：一组永真式
- 推理规则：一个逻辑蕴涵式

- **PC的推理规则（A,B表示任意公式）**
- **A, A→B / B（分离规则）**

- 合理性：PC中的定理都是真理（永真式）
- 一致性：PC中不可能出现A和非A都是定理的情况
- 完备性：只要是真理（永真式），就一定是PC中的定理
- 合理性和完备性有什么区别？

抽象的形式系统

形式系统构造了一个符号串集合

- 形式系统定义就是**符号串集合**的**构造性**定义
- **符号体系**规定了符号串可能包含的字符（或字符的合法组合模式，词）
  如PC中的命题变元、常元和公式的定义
- **公理**规定了几个集合中的符号串（或者这种符号串的模式）
  如PC中的公理，实质是公理模式
- **推理规则**规定了从集合中已知符号串变换生成集合中其它符号串的方法
  如PC中的分离规则

- 一个可以由一批基本符号串（公理）经过一组变换规则，生成一批又一批符号串的系统
- 这样的系统有何意义？

证明及定理判定问题

- PC中的证明是一个公式序列
- 从公理出发，由推理规则产生新的定理，最后到达需要论证的公式
- 证明体现了因果链条，这个链条上的所有真理由推理规则串起来。
- 只有得到证明的公式，才是定理
- 那么，所有的真理都能得到证明吗？
- PC的情况如何？为什么？
- 一个足够复杂的形式系统，如果它是一致的，那么必然不完备。
- 这个是什么意思？

足够复杂的形式系统

离散数学