

离散数学

04 / 谓词演算形式系统和空间信息模型

陈斌 gischen@pku.edu.cn 北京大学地球与空间科学学院

第三周：谓词演算及其形式系统

- › 个体、谓词和量词
- › 谓词公式
- › 谓词公式永真式
- › 谓词演算形式系统FC
- › 全称引入规则及存在消除规则
- › 自然推理系统ND
- › ND中的定理证明

一个自指的逻辑概念 《甲方乙方》

关于三段论：演绎

- › p : 所有的人都会死
- › q : 苏格拉底是人
- › r : 苏格拉底会死

$\{\forall x(M(x) \rightarrow D(x)), M(\text{苏格拉底})\} \vdash D(\text{苏格拉底})$

1) $\{\forall x(M(x) \rightarrow D(x)), M(\text{苏格拉底})\} \vdash \forall x(M(x) \rightarrow D(x))$

2) $\{\forall x(M(x) \rightarrow D(x)), M(\text{苏格拉底})\} \vdash M(\text{苏格拉底}) \rightarrow D(\text{苏格拉底})$

3) $\{\forall x(M(x) \rightarrow D(x)), M(\text{苏格拉底})\} \vdash M(\text{苏格拉底})$

4) $\{\forall x(M(x) \rightarrow D(x)), M(\text{苏格拉底})\} \vdash D(\text{苏格拉底})$

空间信息模型

- › 空间信息
- › 几何信息、拓扑信息和属性信息
- › 矢量表示与栅格表示
- › 空间关系
- › 空间操作
- › 空间查询



空间信息

› 与地球表面有关的事物、事件

行政区划

交通运输网

动植物分布

校园建筑布局

天气变化趋势

污染物扩散和影响

空间信息

› 描述这些事物、事件的信息

包含了空间位置和延伸信息

- 什么地方？
- 多大范围？

因为空间位置和延伸发生关系

- 方位？
- 相互交叉？重叠？包含？

同时包含了其它位置无关的信息

- 名称？归属？价值？

几何、拓扑、属性

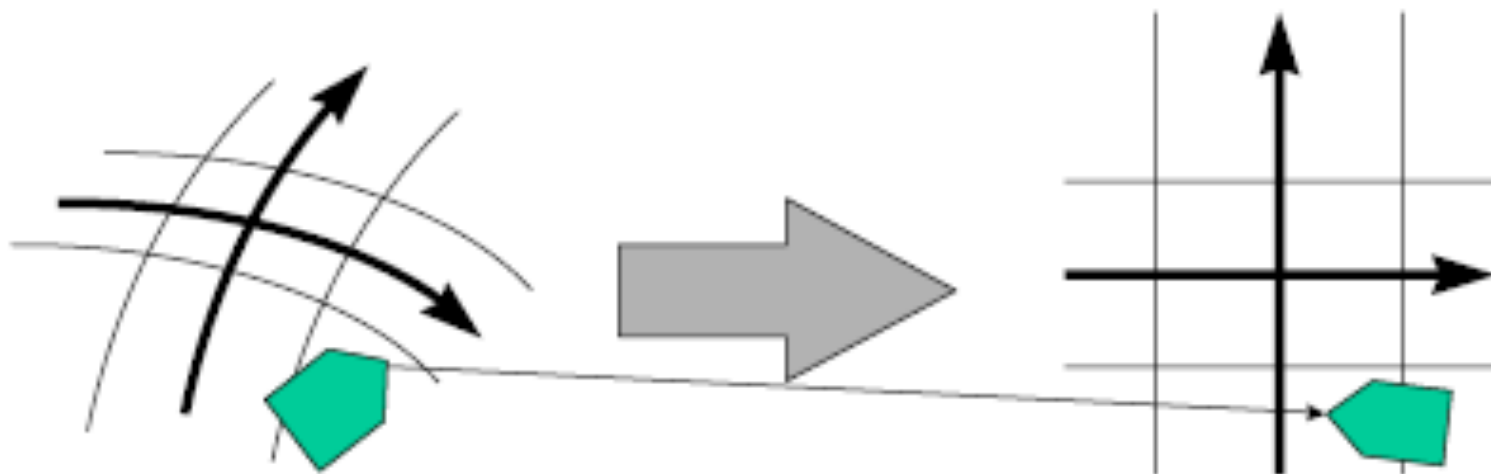
几何信息

描述了事物在空间中的位置及所占据的范围

将地球表面以投影方式转换为平面

通过平面几何来抽象描述和研究事物的位置和范围

用图形和符号的方式来描绘这些空间相关的事物



几何、拓扑、属性

› 拓扑信息

研究空间相关的事物本身或者事物之间的在空间坐标变换下的不变性质

事物本身的内外关系

事物之间的相离、相接、相交

事物之间相连的布局



几何、拓扑、属性

› 属性信息

与位置范围无关的其它信息

描述了事物本身的内在性质和外在表现

事物之间的非位置关系

供应商号	供应商名	所在城市
B01	红星	北京
S10	宇宙	上海
T20	黎明	天津
Z01	立新	重庆

矢量表示与栅格表示

› 矢量表示

采用点坐标、点之间的连接来描述地物的位置、边界



矢量表示与栅格表示

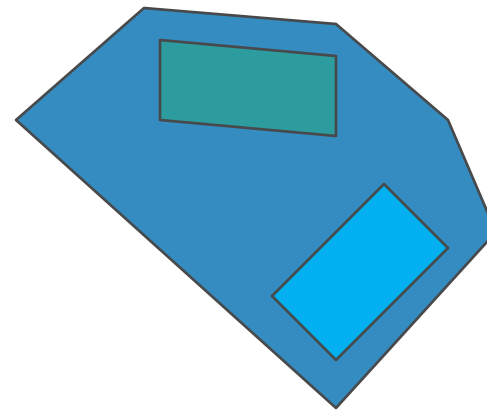
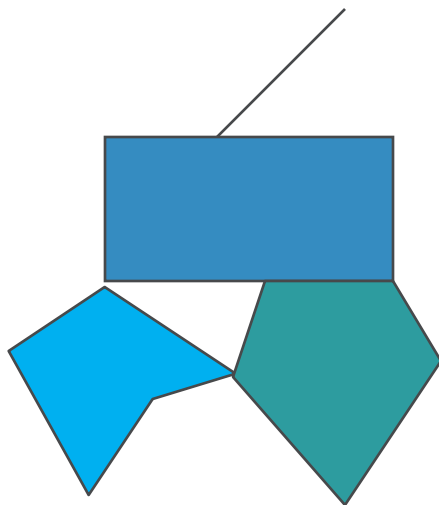
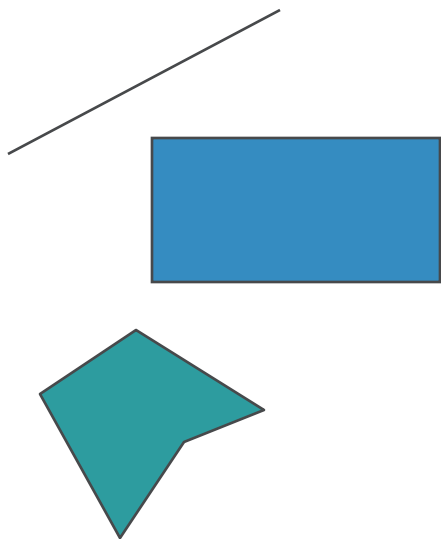
› 栅格表示

采用图像方法直接描述地物



空间关系

- › 描述地物之间在空间位置和范围上的相离、相接、相交、包含等关系



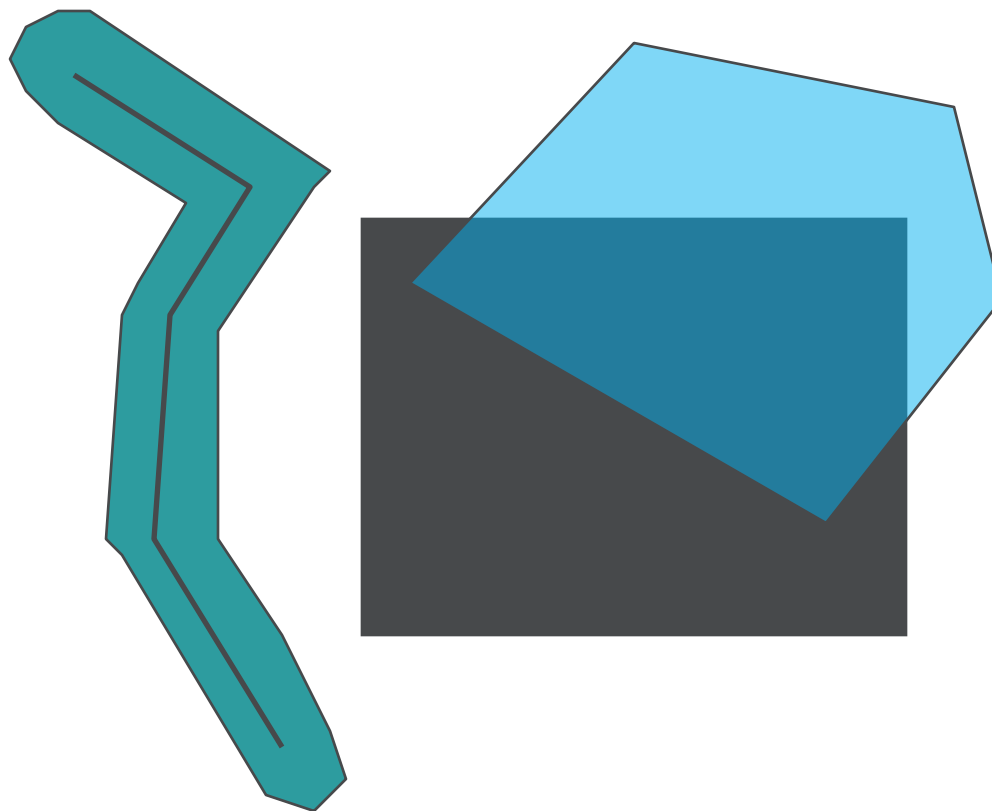
空间操作

› 代表地物的几何图形之间所进行的一些几何运算

缓冲区生成

叠加运算

.....



空间查询

- › 获取关于地物的几何性质
位置、周长、面积
- › 获取地物之间的空间关系
相离、相接、相交或包含
可以通过叠加运算来获取空间关系
- › 获取代表地物的图形的图论性质
连通性分析
最短/最佳路径选择
最佳资源配置

拓扑关系代数：DE-9IM

› 维度扩展的9交叉模型DE9IM

Dimensionally Extended 9-Intersection Model

4交叉模型只两两测试几何形的内部和边界的相交情况，不能处理复杂的几何形

9交叉模型增加了对外部相交的测试，同时将测试结果扩展为相交点集的维度

可以表达点线面之间的空间关系，可以处理带洞的多边形以及线和多边形集合

拓扑关系代数：DE-9IM

› 记号

给定几何形 a ， $I(a)$ ， $B(a)$ ， $E(a)$ 分别代表 a 的内部、边界和外部

将两个几何形的内部、边界、外部分别两两做相交操作，操作的结果记为 x ， x 可能是多个不同维度几何形的集合

将 x 中维度最高几何形的维度记为 $\dim(x)$ ，取值可能为 0 、 1 、 2 ；
如果 x 为空集，则 $\dim(x)=-1$

拓扑关系代数：DE-9IM

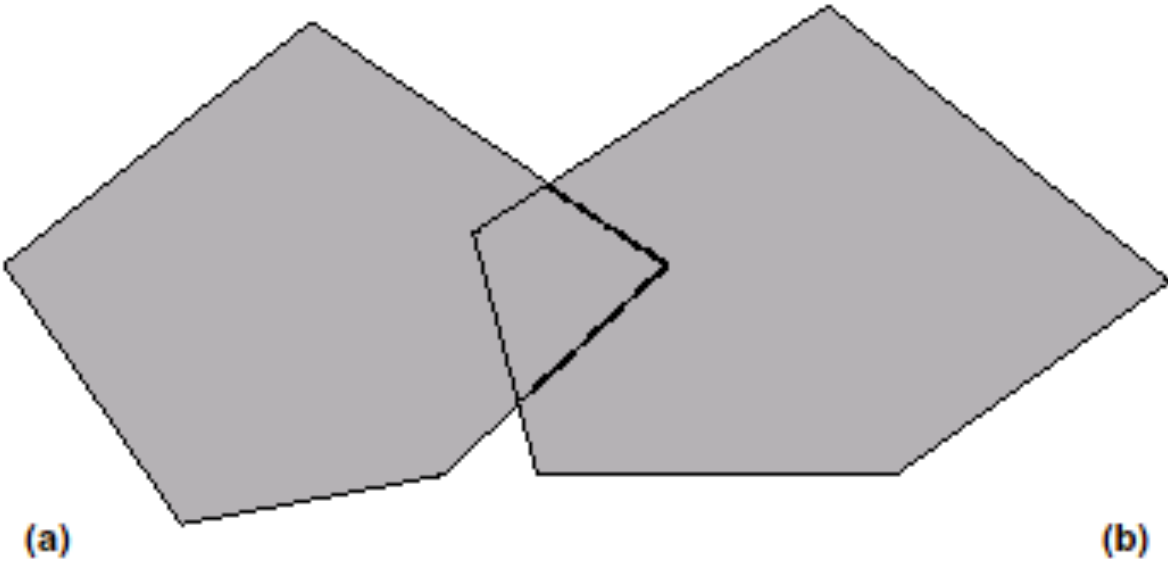
› 定义

	Interior	Boundary	Exterior
Interior	$dim(I(a) \cap I(b))$	$dim(I(a) \cap B(b))$	$dim(I(a) \cap E(b))$
Boundary	$dim(B(a) \cap I(b))$	$dim(B(a) \cap B(b))$	$dim(B(a) \cap E(b))$
Exterior	$dim(E(a) \cap I(b))$	$dim(E(a) \cap B(b))$	$dim(E(a) \cap E(b))$

Table 2.1—The DE-9IM

拓扑关系代数：DE-9IM

测试示例



	Interior	Boundary	Exterior
Interior	2	1	2
Boundary	1	0	1
Exterior	2	1	2

拓扑关系代数：DE-9IM

› 模式矩阵pattern matrix

两个几何形之间的空间关系判定可以通过其DE-9IM测试矩阵和模式矩阵的匹配来实现

模式矩阵是 3×3 的矩阵，与DE-9IM矩阵一一对应，但是分量的取值范围是 $\{T, F, *, 0, 1, 2\}$

- T匹配0,1,2，代表交集不为空
- F匹配-1，代表交集为空
- *匹配-1,0,1,2，代表不关心
- 0, 1, 2分别匹配自身

模式矩阵可以行优先的方式表示为一维数组

拓扑关系代数：DE-9IM

› 模式矩阵示例

```
char * overlapMatrix = 'T*T***T**' ;  
Geometry* a, b;  
Boolean b = a->Relate(b, overlapMatrix);
```

拓扑关系代数：DE-9IM

› 优势

可以表达多种空间关系

可以对特定的空间关系进行微调

› 缺点

所表示的空间关系不能通过自然语言表达

对于一般开发者形成理解障碍

› 解决方案

将普遍理解的空间关系用DE-9IM重新定义

拓扑关系代数：DE-9IM

› 相离Disjoint

$$a.Disjoint(b) \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset$$

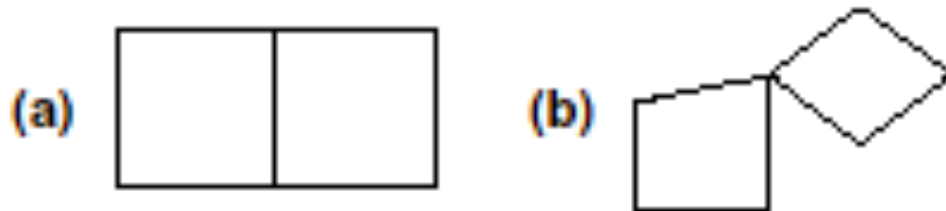
$$\begin{aligned} a.Disjoint(b) &\Leftrightarrow (I(a) \cap I(b) = \emptyset) \wedge (I(a) \cap B(b) = \emptyset) \wedge (B(a) \cap I(b) = \emptyset) \wedge (B(a) \cap B(b) = \emptyset) \\ &\Leftrightarrow a.Relate(b, 'FF*FF****') \end{aligned}$$

	内部	边界	外部
内部	F	F	*
边界	F	F	*
外部	*	*	*

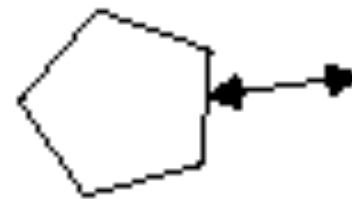
拓扑关系代数：DE-9IM

› 相接Touches图示

Polygon/Polygon



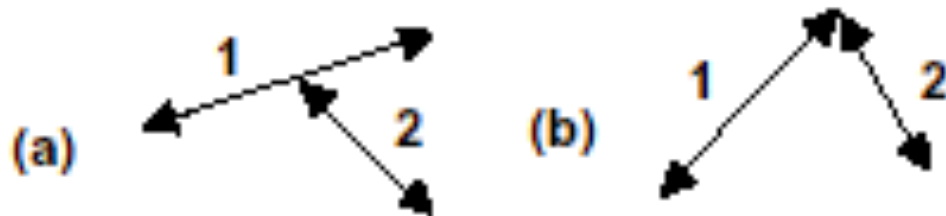
Polygon/LineString



Polygon/Point



LineString/LineString



LineString/Point



拓扑关系代数：DE-9IM

› 相接Touches

适于A/A, L/L, L/A, P/A 和 P/L

$$a.Touches(b) \Leftrightarrow (I(a) \cap I(b) = \emptyset) \wedge (a \cap b) \neq \emptyset$$

$$a.Touches(b) \Leftrightarrow (I(a) \cap I(b) = \emptyset) \wedge ((B(a) \cap I(b) \neq \emptyset) \vee (I(a) \cap B(b) \neq \emptyset) \vee (B(a) \cap B(b) \neq \emptyset)) \\ \Leftrightarrow a.Relate(b, 'FT*****') \vee a.Relate(b, 'F**T*****') \vee a.Relate(b, 'F***T****')$$

	内部	边界	外部
内部	F	T/*/*	*
边界	*/T/*	*/*/T	*
外部	*	*	*

拓扑关系代数：DE-9IM

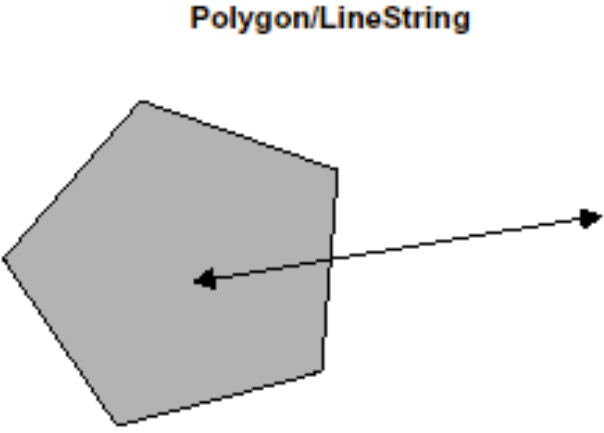
› 交叉Crosses

适于P/L, P/A, L/L 和 L/A

$$a.Crosses(b) \Leftrightarrow (dim(I(a) \cap I(b)) < \max(dim(I(a)), dim(I(b)))) \wedge (a \cap b \neq a) \wedge (a \cap b \neq b)$$

P/L, P/A, L/A

$$a.Crosses(b) \Leftrightarrow (I(a) \cap I(b) \neq \emptyset) \wedge (I(a) \cap E(b) \neq \emptyset) \Leftrightarrow a.Relate(b, 'T*T*****')$$



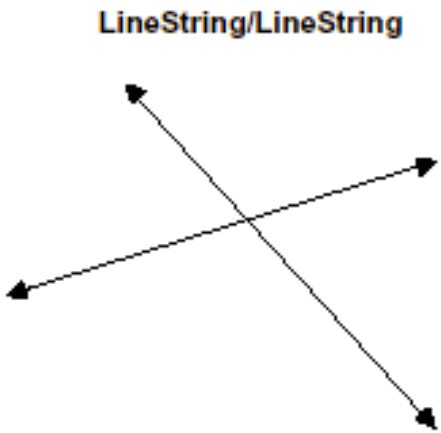
	内部	边界	外部
内部	T	*	T
边界	*	*	*
外部	*	*	*

拓扑关系代数：DE-9IM

› 交叉Crosses

L/L

$$a.Crosses(b) \Leftrightarrow \dim(I(a) \cap I(b)) = 0 \Leftrightarrow a.Relate(b, '0*****');$$

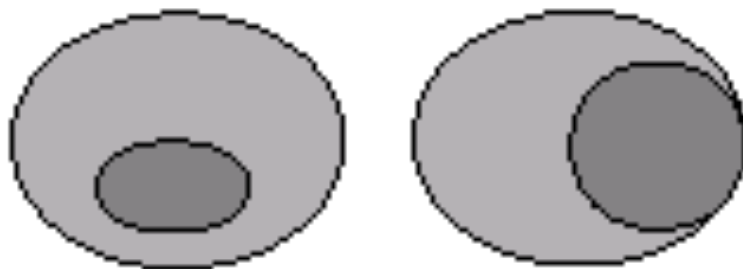


	内部	边界	外部
内部	0	*	*
边界	*	*	*
外部	*	*	*

拓扑关系代数：DE-9IM

被包含Within图示

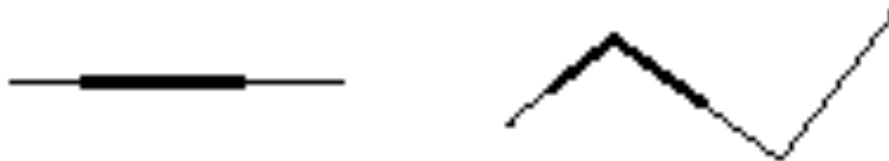
Polygon/Polygon



Polygon/LineString



LineString/LineString



Polygon/Point



拓扑关系代数：DE-9IM

› 被包含Within

$$a.Within(b) \Leftrightarrow (a \cap b = a) \wedge (I(a) \cap I(b) \neq \emptyset)$$

$$a.Within(b) \Leftrightarrow (I(a) \cap I(b) \neq \emptyset) \wedge (I(a) \cap E(b) = \emptyset) \wedge (B(a) \cap E(b) = \emptyset) \Leftrightarrow a.Relate(b, 'T*F**F***')$$

	内部	边界	外部
内部	T	*	F
边界	*	*	F
外部	*	*	*

拓扑关系代数：DE-9IM

› 重叠Overlaps

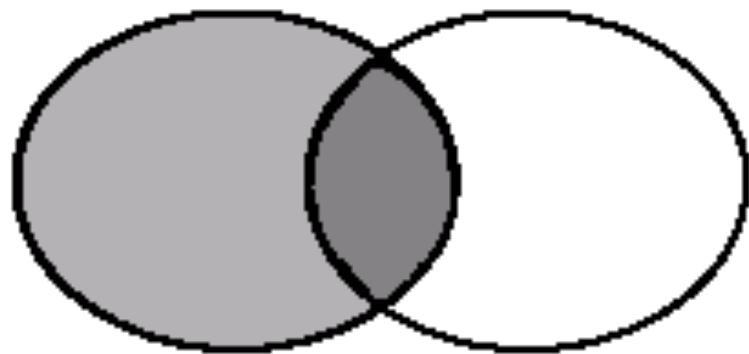
适于A/A, L/L, P/P

$$a.Overlaps(b) \Leftrightarrow (dim(I(a)) = dim(I(b)) = dim(I(a) \cap I(b))) \wedge (a \cap b \neq a) \wedge (a \cap b \neq b)$$

A/A, P/P

$$a.Overlaps(b) \Leftrightarrow (I(a) \cap I(b) \neq \emptyset) \wedge (I(a) \cap E(b) \neq \emptyset) \wedge (E(a) \cap I(b) \neq \emptyset) \Leftrightarrow a.Relate(b, 'T*T***T**')$$

Polygon/Polygon



	内部	边界	外部
内部	T	*	T
边界	*	*	*
外部	T	*	*

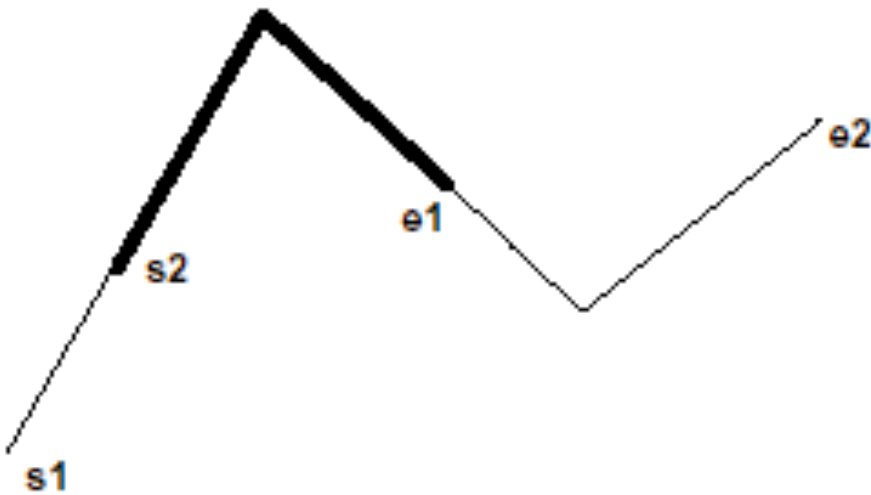
拓扑关系代数：DE-9IM

› 重叠Overlaps

L/L

$$a.Overlaps(b) \Leftrightarrow (dim(I(a) \cap I(b) = 1) \wedge (I(a) \cap E(b) \neq \emptyset) \wedge (E(a) \cap I(b) \neq \emptyset) \Leftrightarrow a.Relate(b, '1*T***T**')$$

LineString/LineString



	内部	边界	外部
内部	1	*	T
边界	*	*	*
外部	T	*	*

拓扑关系代数：DE-9IM

› 包含Contains

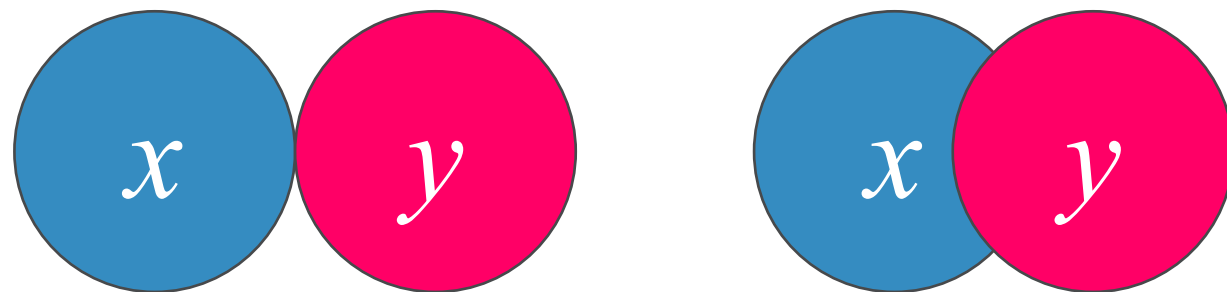
$$a.Contains(b) \Leftrightarrow b.Within(a)$$

› 相交Intersects

$$a.Intersects(b) \Leftrightarrow ! a.Disjoint(b)$$

拓扑关系代数：RCC

- › 区域连接算子RCC：Region Connection Calculus
- › RCC是一个代数系统，从定义的“区域”、“连接关系”以及两条公理出发，采用一阶谓词逻辑定义出所有的拓扑关系
- › “区域”是拓扑空间中的非空集合，也就是我们需要讨论拓扑关系的对象
- › “连接关系”是一个区域间的二元关系，两条公理阐明了其自反和对称的性质



拓扑关系代数：RCC

$$\begin{aligned}
 DC(x, y) &\equiv_{def} \neg C(x, y) \\
 P(x, y) &\equiv_{def} \forall z [C(z, x) \rightarrow C(z, y)] \\
 PP(x, y) &\equiv_{def} P(x, y) \wedge \neg P(y, x) \\
 EQ(x, y) &\equiv_{def} P(x, y) \wedge P(y, x) \\
 O(x, y) &\equiv_{def} \exists z [P(z, x) \wedge P(z, y)] \\
 PO(x, y) &\equiv_{def} O(x, y) \wedge \neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x) \\
 DR(x, y) &\equiv_{def} \neg O(x, y) \\
 EC(x, y) &\equiv_{def} C(x, y) \wedge \neg O(x, y) \\
 TPP(x, y) &\equiv_{def} PP(x, y) \wedge \exists z [EC(z, x) \wedge EC(z, y)] \\
 NTPP(x, y) &\equiv_{def} PP(x, y) \wedge \neg \exists z [EC(z, x) \wedge EC(z, y)] \\
 P^{-1}(x, y) &\equiv_{def} P(y, x) \\
 PP^{-1}(x, y) &\equiv_{def} PP(y, x) \\
 TPP^{-1}(x, y) &\equiv_{def} TPP(y, x) \\
 NTPP^{-1}(x, y) &\equiv_{def} NTPP(y, x)
 \end{aligned}$$

C: connects

DC: disconnects

P: is part of

PP: is proper part of

EQ: is equal to

O: overlaps

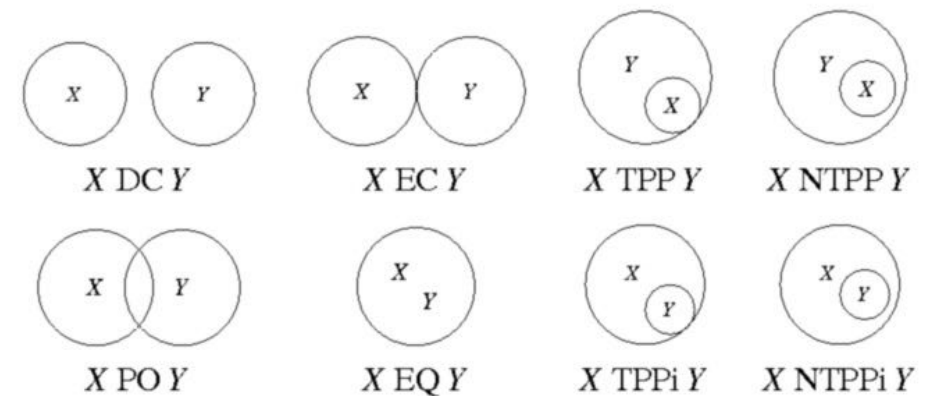
PO: partially overlaps

DR: discrete from

EC: externally connected

TPP: tangential proper part

NTPP: non-tangential ...



拓扑关系代数：RCC

- 通过上述定义的关系，可以进一步定义作用于区域的函数
 - $\text{sum}(x,y)$: union of x and y
 - $\text{compl}(x)$: complement of x
 - $\text{prod}(x,y)$: intersection of x and y
 - $\text{diff}(x,y)$: difference of x and y
- 这些函数又可以进一步定义更为复杂的关系

$$\text{CON}(x) \equiv_{def} \forall y \forall z [\text{EQ}(\text{sum}(y, z), x) \rightarrow \text{C}(y, z)]$$

拓扑关系代数：RCC

- › 还可以通过增加公理来附加区域的一些性质
如表达区域都可以分出真内部区域

$$\forall x \exists y \text{NTPP}(y, x)$$

可以表达更为复杂或者特定的拓扑关系