

离散数学

04 / 集合与无穷

陈斌 gischen@pku.edu.cn 北京大学地球与空间科学学院

第四周：集合基本概念

- › 集合论与无限
- › 集合基本概念
- › 子集合
- › 集合基本运算
- › 集合族及运算
- › 集合之间的运算：结果是集合
并，交，差，补
- › 集合之间的关系：结果是真假
子集
- › 元素与集合之间的关系：结果真假
隶属
- › 罗素悖论？

关于无限

› 潜无限、实无限

潜无限：证明“素数无穷多个”

如何理解“实无限”？

› “整体大于部分”

如何理解它不成立的情况



关于一一对应

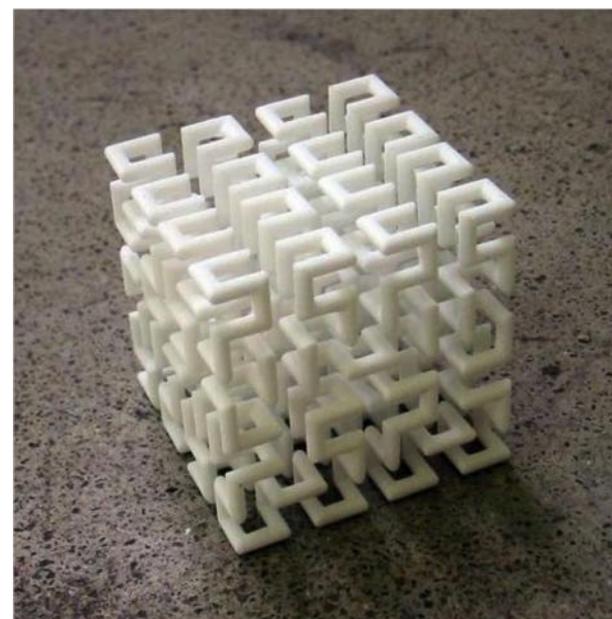
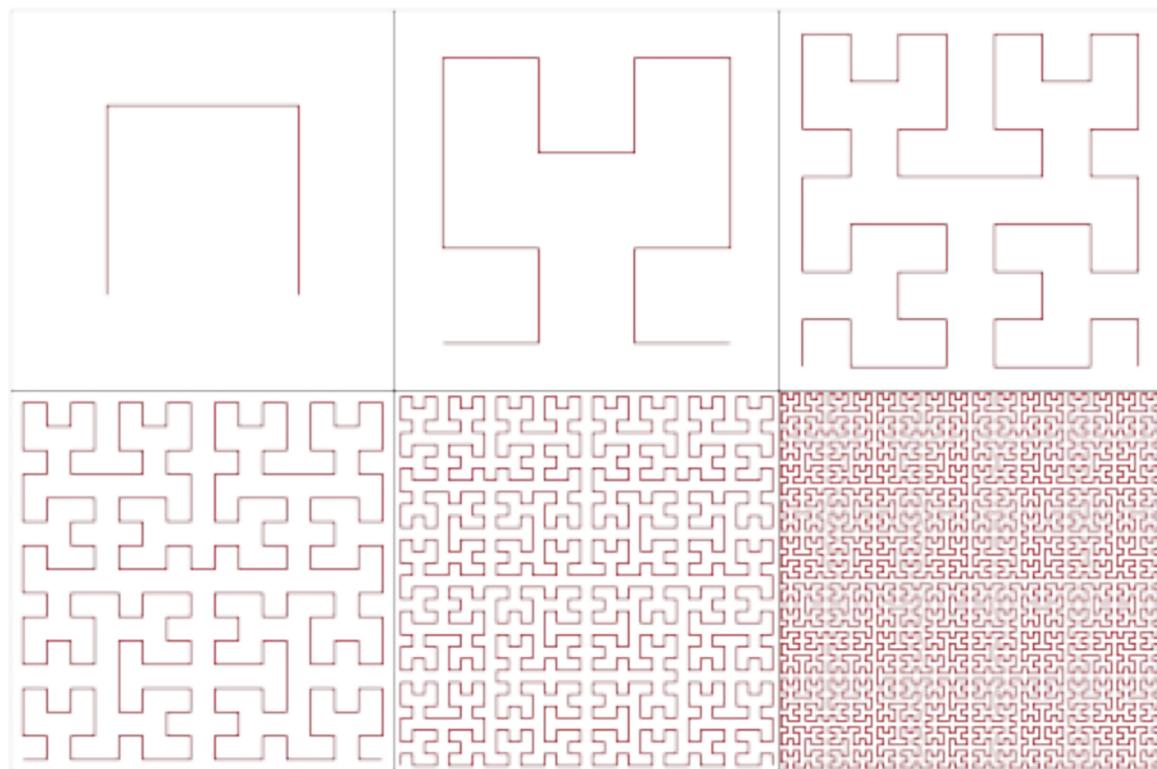
- › 自然数与有理数的一一对应？
- › 自然数与实数：不同层次的无限

康托尔对角线法则

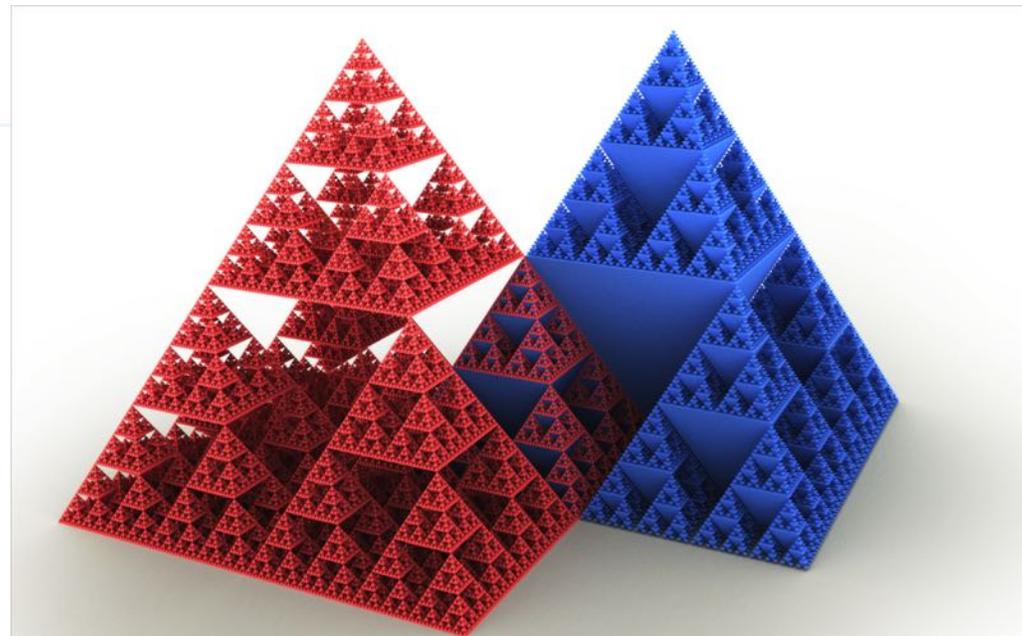
a_1	0.10100111001...
a_2	0.00100110001...
a_3	0.11101111000...
a_4	0.10001101001...
a_5	0.00010100111...

x	0.01011.....

涉及无限的特殊构造：希尔伯特曲线



谢尔宾斯基三角形



巴赫：音乐的奉献



1st Time: C Minor

→ D minor

The image displays two systems of musical notation for the first time of the piece in C Minor. Each system consists of three staves: a treble clef staff, an alto clef staff, and a bass clef staff. The first system is in C Minor and features a yellow vertical highlight on the first few notes of the treble and bass staves. The second system is in D minor, as indicated by the arrow and text '→ D minor' at the end of the first staff. The notation includes various rhythmic values and accidentals.

罗素悖论

- › 设命题函数 $P(x)$ 表示 “ $x \notin x$ ”
- › 现假设由性质 P 确定一个集合 A ——也就是说 “ $A = \{x \mid x \notin x\}$ ”
- › 那么现在的问题是： $A \in A$ 是否成立？
- › 首先，若 $A \in A$ ，则 A 是 A 的元素，那么 A 不具有性质 P ，由命题函数 P 知 $A \notin A$ ；
- › 其次，若 $A \notin A$ ，也就是说 A 具有性质 P ，而 A 是由所有具有性质 P 的类组成的，所以 $A \in A$ 。

$$\text{Let } R = \{x \mid x \notin x\}, \text{ then } R \in R \iff R \notin R$$

罗素悖论的形式化表示

- › 根据朴素集合论，任何谓词P都可以确定一个集合y，也就是说：

$$\exists y \forall x (x \in y \iff P(x))$$

- › 定义 $P(x) \equiv x \notin x$

请继续形式化论述悖论

罗素悖论的形式化表示

- › 根据朴素集合论，任何谓词P都可以确定一个集合y，也就是说：

$$\exists y \forall x (x \in y \iff P(x))$$

- › 定义 $P(x) \equiv x \notin x$
- › 我们用存在消除： $\exists x A(x) \iff A(t)$ ，就等价于： $\forall x (x \in y \iff x \notin x)$
- › 以及全称消除： $\forall x A(x) \Rightarrow A(a|x)$
- › 就蕴含了：
- › $y \in y \iff y \notin y$

第四周：归纳定义

- › 归纳定义
- › 自然数定义
- › 归纳原理
- › 数学归纳法
- › 命题公式的定义？
- › 归纳原理和数学归纳法的联系？
- › 数学归纳法是否可用于证明对全体有理数都成立的命题？