

离散数学

04 / 形式系统中的命题与证明

陈斌 gischen@pku.edu.cn 北京大学地球与空间科学学院

第二周内容：数理逻辑2

重言式

概念

逻辑等价式和逻辑蕴涵式

代入原理和替换原理

证明逻辑等价式和逻辑蕴涵式

范式

范式和基本术语

求范式的基本步骤

主范式

联结词完备性

命题演算形式系统

形式系统和证明、演绎

命题演算形式系统PC

PC中的证明

三个元定理

定理判定问题

课堂练习：判断重言式

1600012183-张三-判断重言式.pptx

- 用程序验证
- 可以赋予解释么？

6. 试判定以下各式是否为重言式：

（1）$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

（2）$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

（3）$q \rightarrow (p \rightarrow q)$

（4）$p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

（5）$(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow q)$

（6）$(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$

课堂讨论：从逻辑等价谈起

逻辑等价式(logical equivalent)

- 当命题公式A↔B是**重言式**时，则称A逻辑等价于B，记作A ⇔ B，称作**逻辑等价式**
- 也可以理解为公式A和公式B**等值**
- 逻辑等价体现了两个公式之间的一种**关系**：在任何赋值状况下它们都等值

A ⇔ B可以是一个命题吗？

- 逻辑等价式（A ⇔ B）并不是一个命题公式
- 它表示的是两个命题公式A、B之间的一种关系

  也就是A↔B这个命题公式是永真式

  或者说A、B无论在任何赋值状况下等值
- 注意：A↔B是命题公式，因为双向蕴涵是逻辑联结词
- 如果把A ⇔ B当作是一个做判断陈述句，要注意只有当A、B都是确定的命题公式情况下，才能是命题。

课堂讨论：逻辑蕴涵与推理

逻辑蕴涵式(logical implication)

- 当命题公式A→B是重言式时，则称A逻辑蕴涵B，记作A⊨B，称作逻辑蕴涵式
- 也可以理解为公式A的所有成真赋值都是公式B的成真赋值
- 每个逻辑等价式可以看作两个逻辑蕴涵式，也就是说A⊨⊨B也有A⊨B,B⊨A

  A和B等值，所以A→B和B→A都是重言式
- 逻辑蕴涵体现了两个公式AB之间的另一种关系：在任何赋值状况下只要A真，B都真

- 同样可以理解为命题公式A、B之间的一种关系
- 因为逻辑蕴涵体现了一种A、B的因果关联
- 所以用于推理
- A是B的原因，充分条件

课堂讨论：逻辑蕴涵与推理

逻辑结果

- 逻辑蕴涵经常会被推广为Γ ⊨B的形式
- 其中Γ是一系列公式，表示B是Γ的**逻辑结果**
- 即：使Γ中每一个公式成真的赋值，都是公式B的成真赋值
- 即Γ中的**所有公式的合取**逻辑蕴涵B
- 当Γ中仅包含一个公式A时，就是A ⊨B；
- 如果Γ中不包含任何公式，记做 ⊨B，表示“B永真”

- 注意Γ中有一系列公式的话，这些公式应该合取，并且跟合取的顺序无关
- Γ中所有的公式都是B的原因，而且这个充分条件缺一不可
- Γ ⊨B成立的话，那么无论向Γ中再添加多少个公式，Γ ⊨B也都还成立？
- 如果从Γ中去掉一个公式，Γ ⊨B还会成立吗？为什么？

课堂练习：证明逻辑等价式　1600012183-张三-证明等价式.pptx

11．用三种不同方法证明下列逻辑等价式：

（1）$A \leftrightarrow B \models\models (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

› 参考教材：3.2.2 p34

证明逻辑等价式和逻辑蕴涵式

› **真值表法**：要证明A ⊨⊨ B，A ⊨B，只要：
分别列出A↔B和A→B的真值表，最后一列全为真即可。

› **对赋值进行讨论**：要证明A ⊨B，只要证明：
A的任意一个成真赋值都是B的成真赋值，或者
B的任意一个成假赋值都是A的成假赋值。

☞如果证明了A ⊨B和B ⊨A，那么就证明了A ⊨⊨ B。

› **推演法**：利用已知的重言式、逻辑等价式和逻辑蕴涵式，采用**代入原理**和**替换原理**进行推演。

课堂练习：主析取范式

1600012183-张三-主析取范式.pptx

› 利用真值表，写出下列公式的主析取范式

（1）$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

（2）$q \wedge (p \vee \neg q)$

（3）$p \vee (\neg p \rightarrow (q \vee (\neg q \rightarrow r)))$

（4）$(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$

（5）$p \rightarrow (p \wedge (q \rightarrow r))$

形式系统、证明、定理

形式系统

- 形式系统是一个**符号体系**
- 系统中的概念由符号表示，推理过程即符号变换的过程
- 以若干最基本的**重言式**作为基础，称作**公理**（axioms）
- 系统内符号变换的依据是若干**确保由重言式导出重言式**的规则，称作**推理规则**（rules of inference）
- 公理和推理规则确保系统内由**正确的前提**总能得到**正确的推理结果**

命题演算形式系统PC

- 符号系统：严格定义的命题公式
- 公理：一组永真式
- 推理规则：一个逻辑蕴涵式

- PC的**推理规则**（A,B表示任意公式）
- A, A→B / B（**分离规则**）

- 合理性：PC中的定理都是真理（永真式）
- 一致性：PC中不可能出现A和非A都是定理的情况
- 完备性：只要是真理（永真式），就一定是PC中的定理
- 合理性和完备性有什么区别？

抽象的形式系统

形式系统构造了一个符号串集合

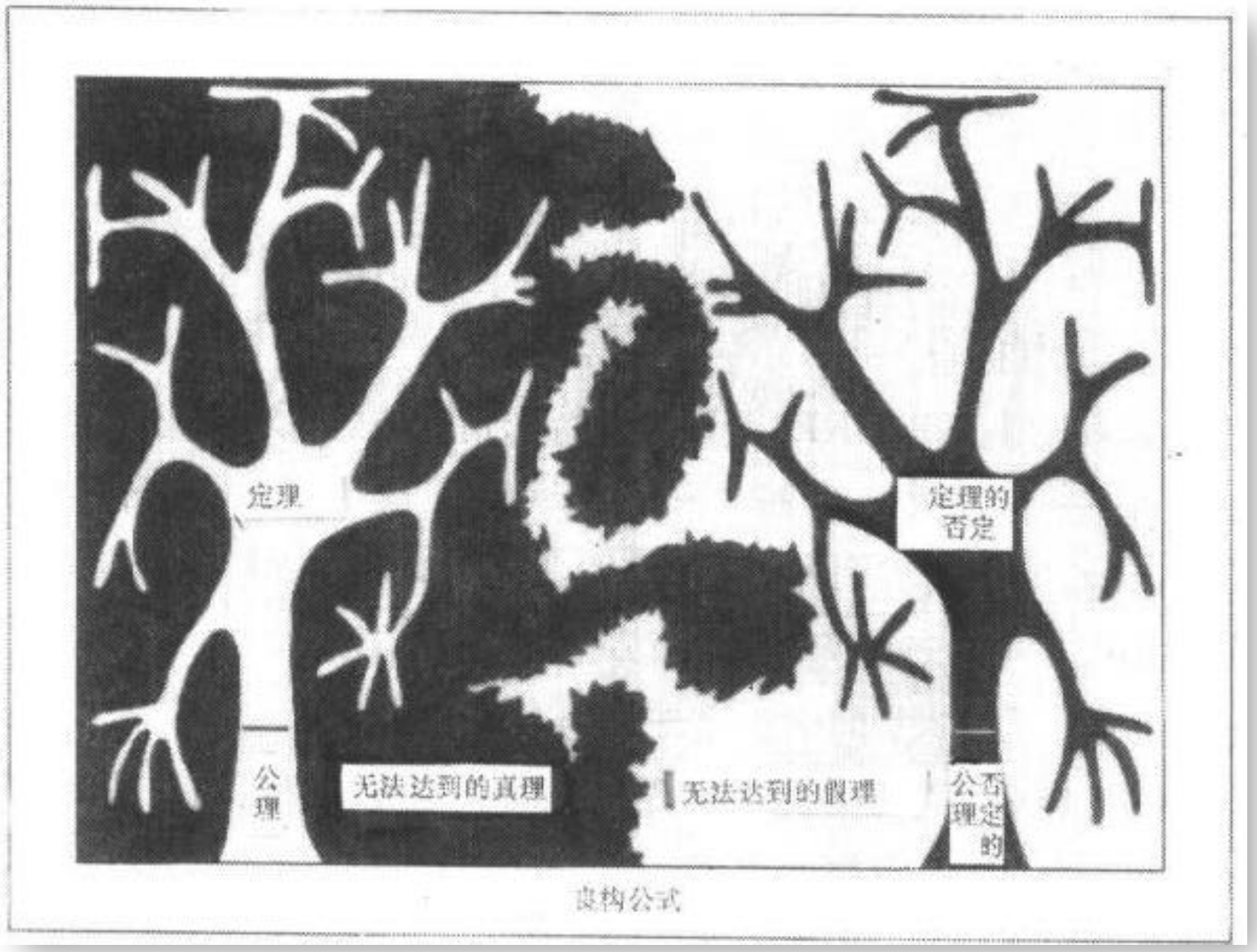
- 形式系统定义就是**符号串集合**的**构造性**定义
- **符号体系**规定了符号串可能包含的字符（或字符的合法组合模式，词）
  如PC中的命题变元、常元和公式的定义
- **公理**规定了几个集合中的符号串（或者这种符号串的模式）
  如PC中的公理，实质是公理模式
- **推理规则**规定了从集合中已知符号串变换生成集合中其它符号串的方法
  如PC中的分离规则

- 一个可以由一批基本符号串（公理）经过一组变换规则，生成一批又一批符号串的系统
- 这样的系统有何意义？

证明及定理判定问题

- PC中的证明是一个公式序列
- 从公理出发，由推理规则产生新的定理，最后到达需要论证的公式
- 证明体现了因果链条，这个链条上的所有真理由推理规则串起来。
- 只有得到证明的公式，才是定理
- 那么，所有的真理都能得到证明吗？
- PC的情况如何？为什么？
- 一个足够复杂的形式系统，如果它是一致的，那么必然不完备。
- 这个是什么意思？

足够复杂的形式系统



曼德博集合Mandelbrot set

定义 [编辑]

曼德博集合可以用复二次多项式来定义：

$$f_c(z) = z^2 + c$$

其中 c 是一个复数参数。

从 $z = 0$ 开始对 $f_c(z)$ 进行迭代：

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = c$$

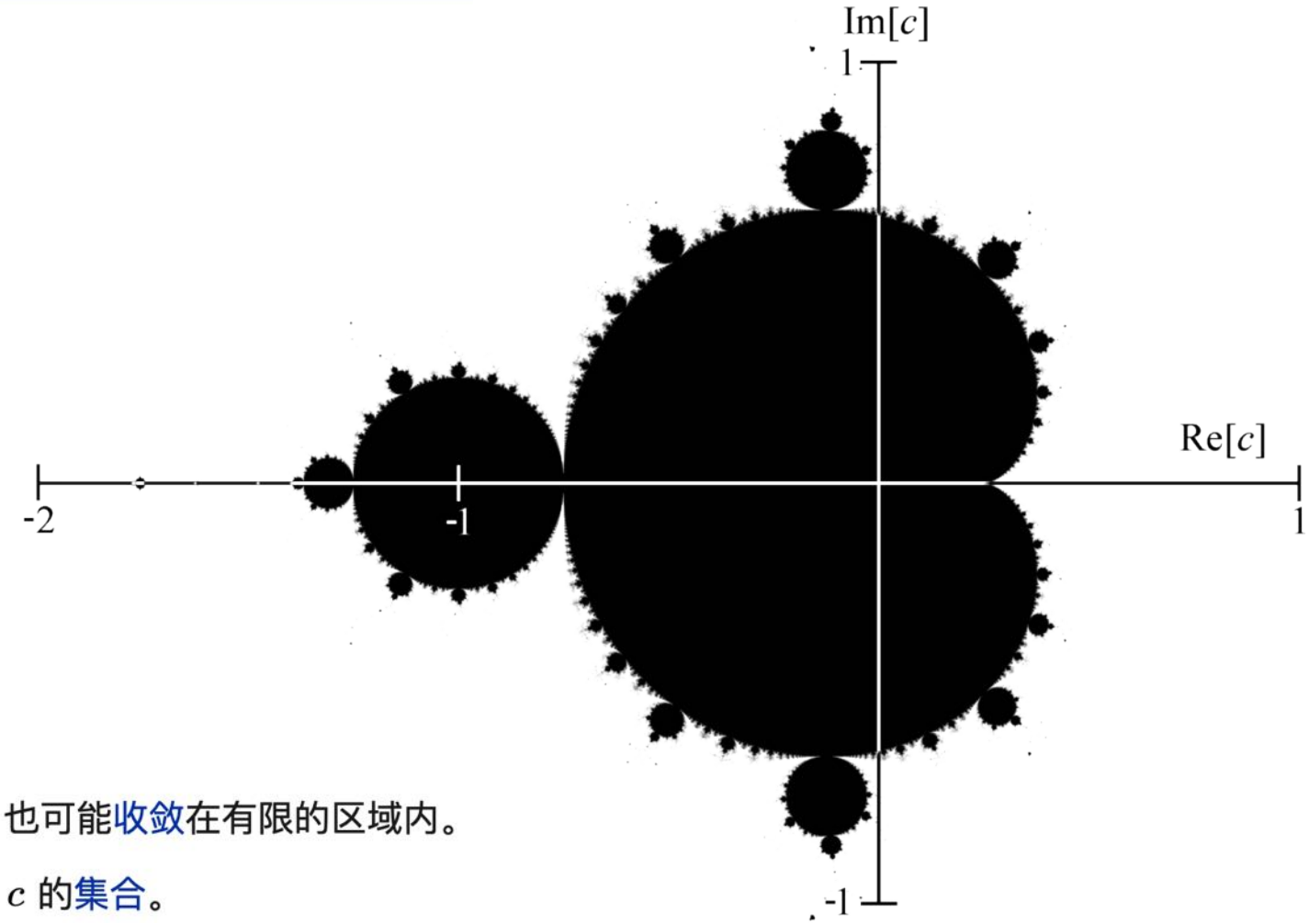
$$z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c$$

每次迭代的值依序如以下序列所示：

$$(0, f_c(0), f_c(f_c(0)), f_c(f_c(f_c(0))), \ldots)$$

不同的参数 c 可能使序列的绝对值逐渐发散到无限大，也可能收敛在有限的区域内。

曼德博集合 M 就是使序列不延伸至无限大的所有复数 c 的集合。



实际上的曼德博集合？

- 集合定义是明确的，但集合不确定
- 存在确定归属和确定不归属
- 但在归属和不归属之间也存在无限复杂的边界，无法判定其归属

