

# 问题是否可解及算法策略

地球与空间科学学院 张书莞

**摘要：**计算机科学为我们对实际问题建模，用数据来表达处理，运用恰当算法予以解决，提供了新颖的思路。在面对问题时，如何探索问题的解决之道，并用最高效的算法求解，是一门精神的学问。本文从可解问题引入，借由图灵机模型，探求 NP 问题与不可解问题的解法，并由此可观算法的精微本质。

**关键词：**可解问题 图灵机 NP 问题 不可解问题 算法

信息技术科学是 21 世纪极为重要的一门学科，计算机领域中不仅有缜密严谨的算法，也蕴含着灵活而深刻的算法思想。许多强大而精准的算法已然运用在了实际领域，给社会运作带来了许多便利，如搜索引擎、模式识别、数据压缩等。但是，计算机仍然有解决不了的问题，在许多形式的人工智能的表现仍待提高。本文试就计算机中的可解问题与不可解问题浅作分析。

## 一、“可解问题”的解决方法

目前，我们已掌握了分治、动态规划、贪婪选择、概率分析、搜索与哈希等算法，来尝试解决我们面对的问题。我们把这些能够解决的问题称为“可解 (Tractable)”问题。反之，不易解的问题，就是“不可解 (Intractable)”问题。

可解问题必然是有解的，且该解答可以被我们找到。因此，寻找解答的算法的时间和空间效率必然是合理的，亦即是在有限可数范围内。“可解问题”往往是多项式问题。所有与指数级增长同步或更快的问题就是不可解的。

许多经典的“可解问题”，如矩阵乘法、最短路径、贪婪选择等，均可以归纳为两种类型：决策问题和优化问题。简要言之，决策问题讨论“一个特定的表述”是否为真，优化问题则是根据规定的标准，来寻找一个最好的解答。决策问题与优化问题往往相伴而生。以“背包”问题为例，其决策问题的表述为：给定  $n$  个物品、物品  $i$  的价值  $v$ 、重量  $w$ 、总重量  $w_0$  和实数  $c$ ，是否存在一个物品组合，其价值大于等于  $c$ ，而总重量小于等于  $w_0$ 。而它的优化问题表述为：给定  $n$  个物品、物品  $i$  的价值  $v$ 、重量  $w$ 、总重量  $w_0$ ，寻求一个物品组合，使其在总重

量不超过  $w_0$  的情况下，总价值最高。

## 二、由图灵机思考非确定性算法

图灵机这个虚拟机器，将具体问题抽象化，为探究问题解决之道提供了很好的思路。确定性图灵机（DTM）具有转换函数的能力。对于给定状态与输入符号，确定了输出符号、磁头移动方向和下一个状态后，确定性图灵机就可以唯一确定其行为。将许多问题转换为对字符串的处理，确定性图灵机就可以成功解决。

对于非确定性图灵机（NTM）而言，给定状态和输入确定时，其行为并不是唯一的，它可以同时进入所有可能的状态。要之，如果说确定性图灵机只能跟踪一条计算路径，非确定性图灵机则拥有一个计算树，同时跟踪多条计算路径。如果其中一条路径引向终止状态，那么非确定性图灵机就接受了给定的输入。

非确定性图灵机的算法由三个阶段组成：

1、非确定性“猜想”阶段。任意猜想一个答案  $s$ ，并将字符串  $s$  写在内存的某个地方。

2、确定性“验证”阶段。一个正常的算法以该决策问题和答案  $s$  作为输入，对  $s$  进行验证。

3、输出阶段。如果验证阶段输出真，则输出“是”；否则输出“否”。

这种不确定性算法给我们的启发是，我们可以在理论上对问题进行分类。相比于确定性算法基于给定的信息做出判断，非确定性算法通过一系列“正确的猜测”来获得答案。

## 三、NP 问题

非确定性多项式时间可解（non-deterministically polynomial-time solvable），又叫 NP 类问题，它满足以下条件：

1、存在一个算法  $A$ ， $A$  的输入是  $D$  的潜在证人， $A$  总是正确辨认该证人的真假。

2、存在一个多项式函数  $p$ ，如果潜在证人对应的  $D$  的实例大小为  $n$ ，则  $A$  在不超过  $p(n)$  个步骤里终结。

如果一个问题存在非确定性算法，可以在多项式时间内解决，则该问题属于

NP 类问题。完全子图问题、汉密尔顿回路问题、可满足性问题等都属于 NP 问题。

借用数学中的“二算法”思想，来思考问题的解决之道。前述“可解问题”可化归为决策问题和最优问题，亦即可最终化归为决策问题。而这些问题也可以表述为搜索问题，搜索的空间就是解的空间。寻找更有效的搜索手段就是算法不断前进的源动力。采用优秀的算法可以把搜索空间的规模缩小至多项式级以内，避开指数级带来的不确定性解。故而搜索问题与决策问题等价，这启示我们可以用二分搜索算法来控制搜索的成本。

#### 四、有无解与是否可决定

非确定性算法能“解”一个问题，当且仅当对每个输出应为“是”的实例，非确定性算法都能在某些运行中输出“是”，即它能猜对解至少一次并验证其正确性。而对于输出应为“否”的实例，非确定算法必须输出“否”。

我们所遇到的问题大致可分为三类：易解问题、NP 完全问题与难解问题。这三种类型的问题均存在解，即算法解决方案。虽然这些方案的时间或空间的效率不高，但它们均属于可决定的问题（**Decidable Problem**）。但是，若一类问题即使花费了指数级的时间成本，仍确实找不到任何解，那么它们就是不可决定问题（**Undecidable Problem**）。它们无法确定性地根据某一方法或步骤来计算解。

基于此，我们对所有问题再次分类：

- 1、易解问题：多项式时间解决方案已知。
- 2、NP 完全问题：多项式时间解决方案未知。
- 3、难解问题：多项式时间解决方案不存在。
- 4、部分不可决定问题：算法解决方案不存在，且证人数量有限。
- 5、高度不可决定问题：算法解决方案不存在，且证人数量无限。
- 6、不可解问题：任何解决方案都不存在。

#### 五、不可决定问题的求解

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。我们依然尝试勇攀高峰，探索极难问题的求解之道。变换思路，我们尝试用次优解来逼近最优解，准确的说，是用次优的算法来探索答案，不断尝试，来希望寻觅到最优解，至少是力所能及的最好的

答案。以下的思路，很有助于寻觅到我们心中的答案。

1、智能穷举的分支限制。这是一种较为高级的回溯策略，搜索时记录下该搜索当前累积的成本。当这个成本超过某个给定值的时候，即不再往前搜索，而是退回去再搜索另外一条路径。例如，将一个图的直径作为给定值，搜索中若当前累积路径长度超过此给定值，则终止此方向的搜索，另寻它路。

2、贪婪近似策略。一步步构建问题的最优解决方案，其中每一步均只需考虑眼前的最佳选择，通过局部最优达到全局最优。如典型的背包问题。

3、启发式搜索策略。搜索时并不是随机选择一条路径来推进，而是根据某些知识来推断应该前进的方向。面临选择时，根据启发函数的估值来决定下一步行动。生活中的许多推理经验，恰和这种思想不谋而合。

4、模拟淬火算法。先迅速降低搜索空间，在接近最优解的地方慢慢搜索，大幅度降低搜索成本。探索逼近最优点的方向是否正确，然后在正确的方向上放心的前进，寻求最美的风景。例如，旅行销售员问题，定义每一个具体的周游为状态，一种可能的邻近状态定义则是任何通过交换两个连续城市对所能达到的状态。

后记：算法，简而言之就是解决问题的方法，或者说一系列解决问题的步骤。这种思维方式，不仅仅体现在解决具体的理论问题上，还处处体现在为人处世中。有智慧的人，会借助算法的思想，统筹兼顾，努力设计最优的人生。遇难则分治，受挫则回溯，不满则跳转，求精则渐进。大道至简，收获最好的风景，直至永恒。

参考文献：

- 1、《改变未来的九大算法》 [美]约翰·麦考密克 中信出版社
- 2、《算法之道》 邹恒明 机械工业出版社