数据结构与算法（Python）-06：树及其算法

陈斌 北京大学地球与空间科学学院 gischen@pku.edu.cn

目录

本章目标

- 理解树数据结构及其应用
- 树用于实现ADT Map
- 用列表来实现树
- 用类和引用来实现树
- 以递归方式实现树
- 用堆来实现优先队列

树的例子

- **在学习了栈、队列等线性数据结构，以及递归算法之后；**
- **本章我们来讨论一种基本的“非线性”数据结构——树；**
- **树在计算机科学的各个领域中被广泛应用**
  操作系统、图形学、数据库管理系统、计算机网络
- **跟自然界中的树一样，数据结构树也分为：根、枝和叶等三个部分**
  但一般数据结构的图示把根放在上方
  叶放在下方

树的例子：生物学物种分类体系

- **首先我们看到分类体系是层次化的**

  树是一种分层结构

  越接近顶部的层越普遍

  越接近底部的层越独特

  界、门、纲、目、科、属、种

- **分类树的用法：辨认物种**

  从顶端开始，沿着箭头方向向下

  门：脊索动物还是节肢动物？

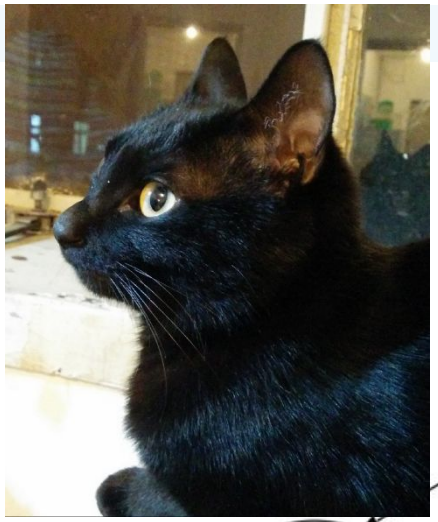
  纲：哺乳动物么？

  目：食肉动物？

  科：猫科？

  属：猫属？

  种：家猫！



树的例子：生物学物种分类体系

- **分类树的第二个特征：一个节点的子节点与另一个节点的子节点相互之间是隔离、独立的**

  猫属Felis和蝇属Musca下面都有Domestica的同名节点，但相互之间并无任何关联，可以修改其中一个Domestica而不影响另一个。

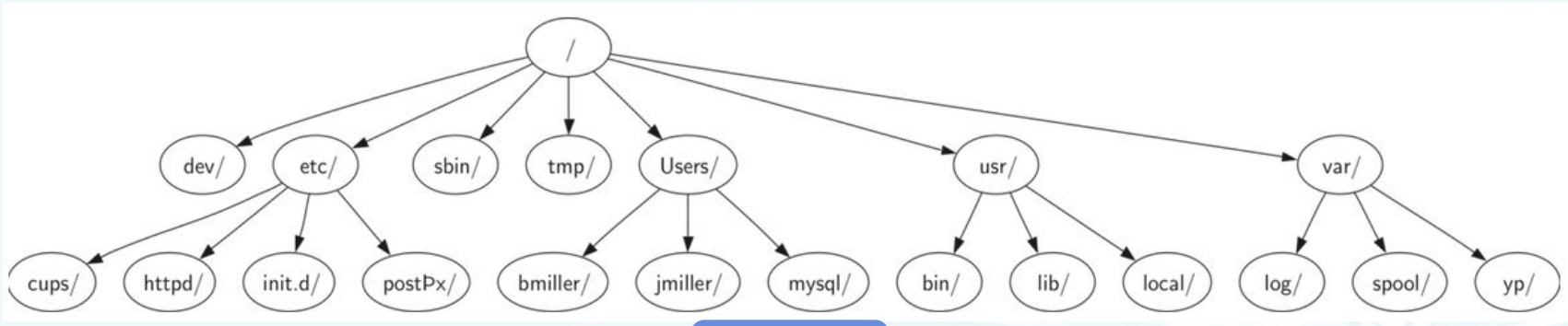
- **分类树的第三个特征：每一个叶节点都具有唯一性**

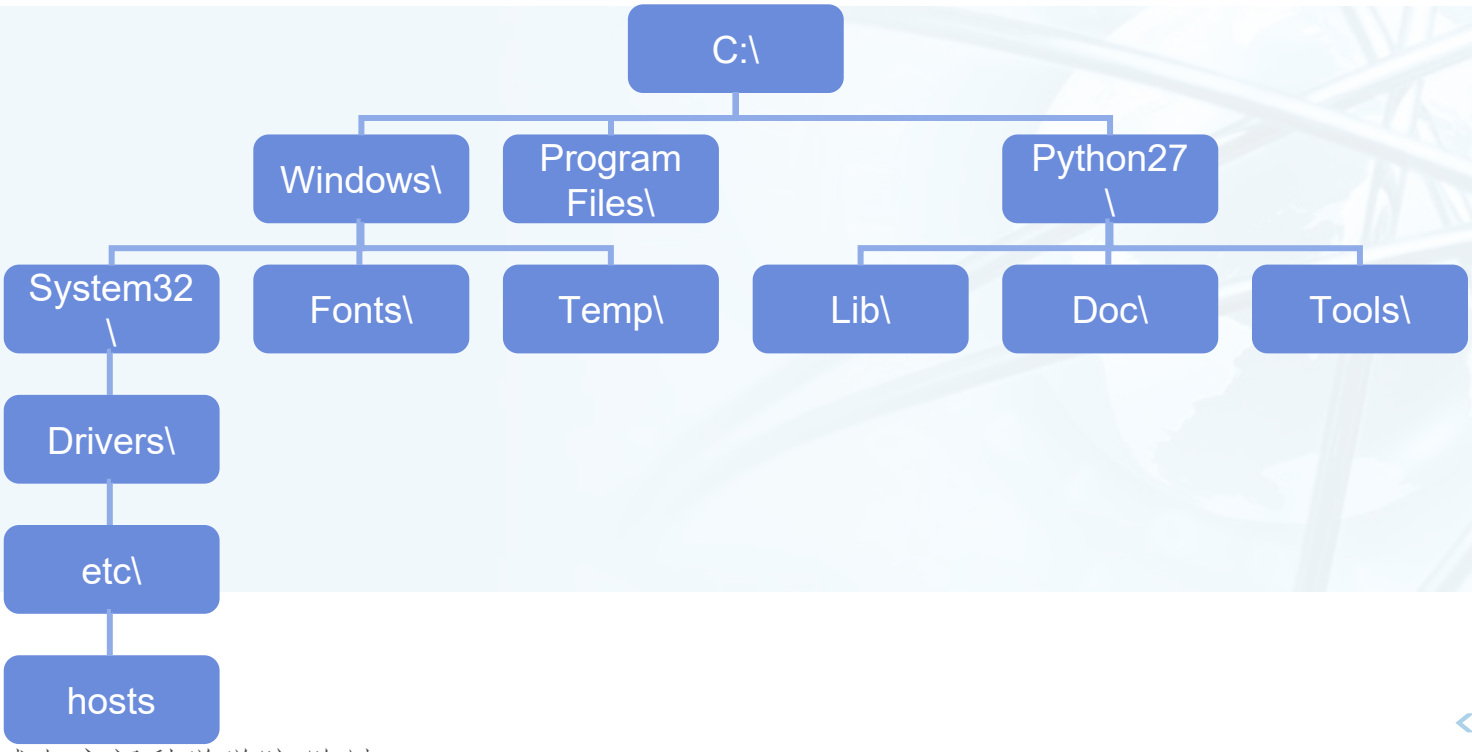
  可以用从根开始到达每个种的完全路径来唯一标识每个物种

  动物界->脊索门->哺乳纲->食肉目->猫科->猫属->家猫种

  Animalia->Chordate->Mammal->Carnivora->Felidae->Felis->Domestica

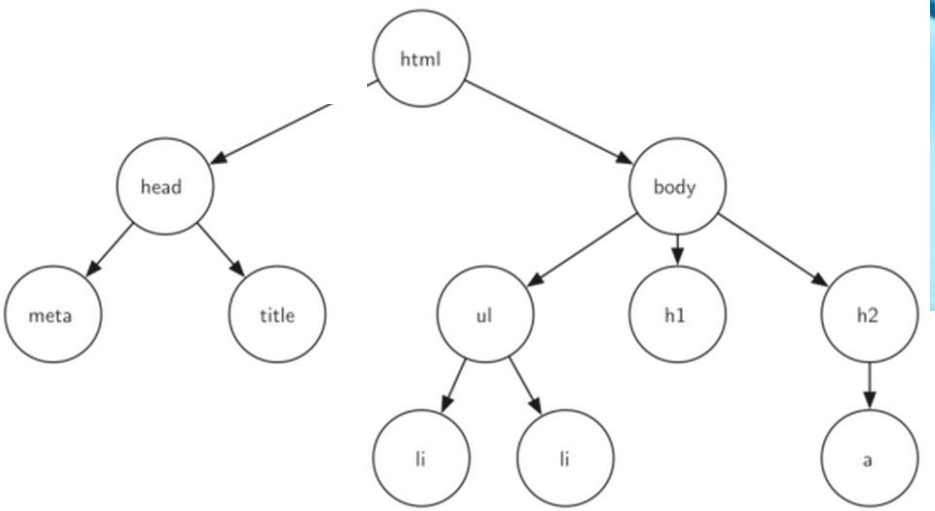
树的例子：文件系统


/
dev/
etc/
sbin/
tmp/
Users/
usr/
var/
cups/
httpd/
init.d/
postPx/
bmiller/
jmiller/
mysql/
bin/
lib/
local/
log/
spool/
yp/

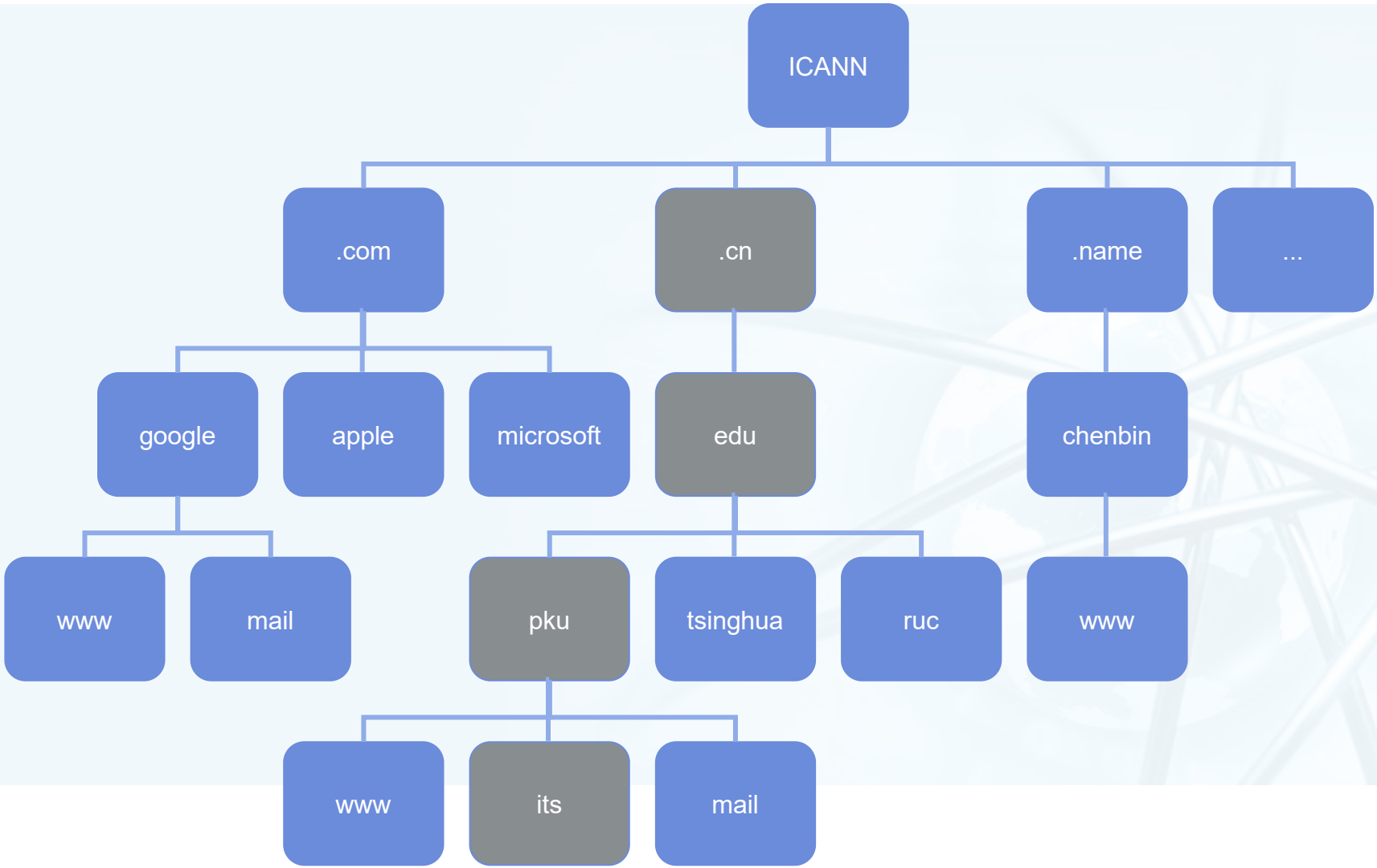

C:\
Windows\
Program Files\
Python27 \
System32 \
Fonts\
Temp\
Lib\
Doc\
Tools\
Drivers\
etc\
hosts

树的例子：HTML文档（嵌套标记）

```
<html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml"
      xml:lang="en" lang="en">
<head>
    <meta http-equiv="Content-Type"
          content="text/html; charset=utf-8" />
    <title>simple</title>
</head>
<body>
<h1>A simple web page</h1>
<ul>
    <li>List item one</li>
    <li>List item two</li>
</ul>
<h2><a href="http://www.cs.luther.edu">Luther CS </a><h2>
</body>
</html>
```



树的例子：域名体系


ICANN
.com
.cn
.name
...
google
apple
microsoft
edu
chenbin
www
mail
pku
tsinghua
ruc
www
www
its
mail

术语与定义

- **节点Node：组成树的基本部分**
  每个节点具有名称，或“键值”
  节点还可以保存额外的数据项，数据项根据不同的应用而变
- **边Edge：边是组成树的另一个基本部分**
  每条边恰好连接两个节点，表示节点之间具有关联，边具有出入方向；
  每个节点（除根节点）恰有一条来自另一节点的入边；
  每个节点可以有多条连到其它节点的出边。
- **根Root：树中唯一一个没有入边的节点**
- **路径Path：由边依次连接在一起的节点的有序列表**
  如：哺乳纲->食肉目->猫科->猫属，是一条路径
- **子节点Children：入边均来自于同一个节点的若干节点，称为这个节点的子节点**

术语与定义

- **父节点Parent：一个节点是其所有出边所连接节点的父节点**
- **兄弟节点Sibling：具有同一个父节点的节点之间称为兄弟节点**
- **子树Subtree：一个节点和其所有子孙节点，以及相关边的集合**
- **叶节点Leaf Node：没有子节点的节点称为叶节点**
- **层级Level：从根节点开始到达一个节点的路径，所包含的边的数量，称为这个节点的层级。**
  如猫属Felis的层级为5，根节点的层级为0
- **高度Height：树中所有节点的最大层级称为树的高度**
  如物种分类树的高度为6

术语与定义：树的定义1

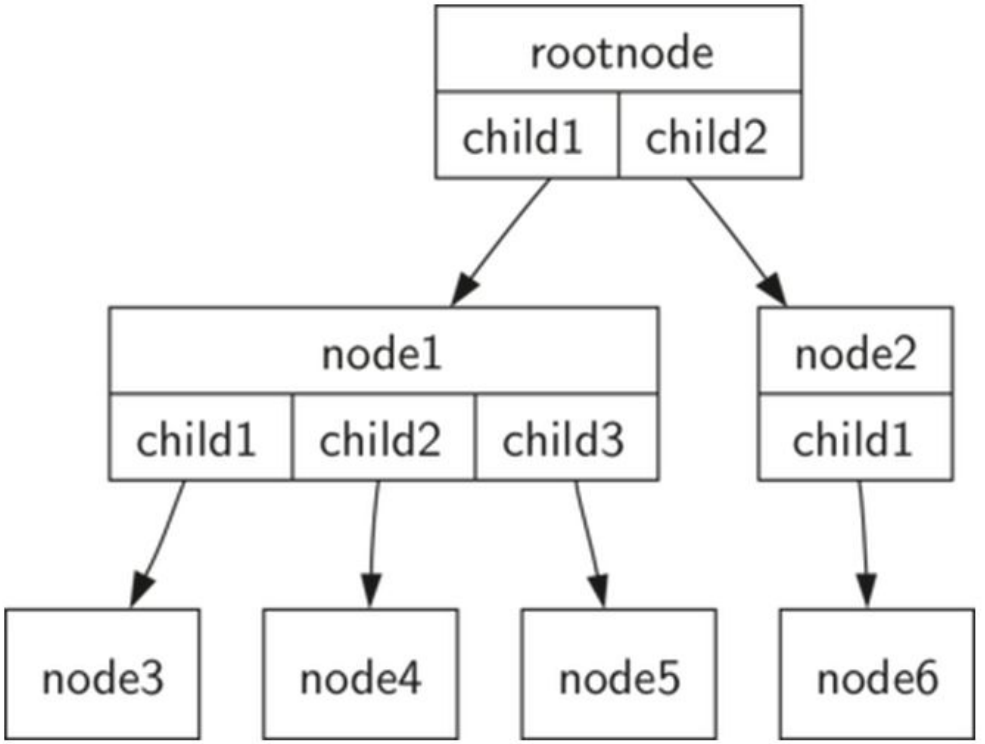
- **树由若干节点，以及两两连接节点的边组成，并具有如下性质：**

  其中一个节点被设定为根；

  每个节点n(除根节点)，都恰连接一条来自节点p的边，p是n的父节点；

  每个节点从根开始的路径是唯一的

  如果每个节点最多有两个子节点，这样的树称为“二叉树binary tree”

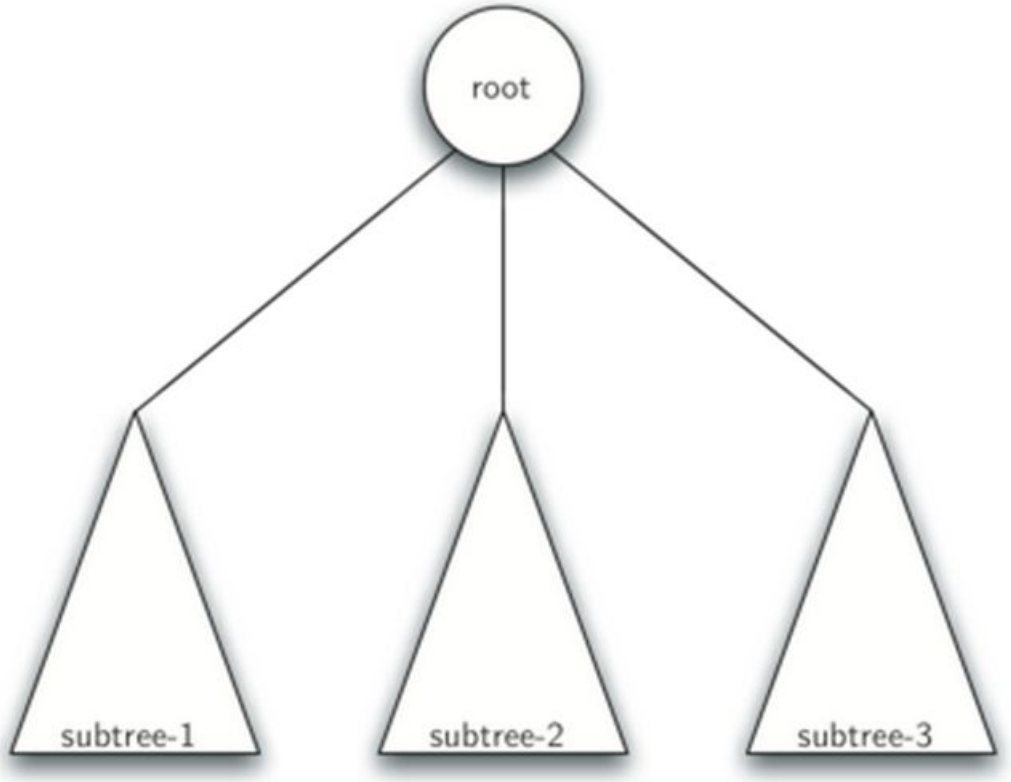


术语与定义：树的定义2（递归定义）

- **树是：**

  空集；

  或者由根节点及0或多个子树构成（其中子树也是树），每个子树的根到根节点具有边相连。



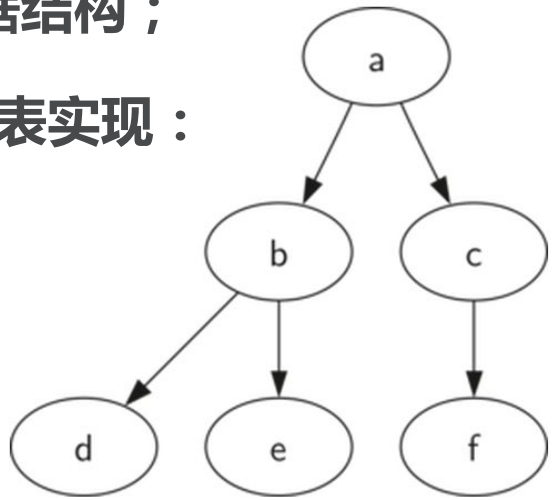
实现树：嵌套列表法

- **首先我们尝试用Python List来实现二叉树树数据结构；**
- **递归的嵌套列表实现二叉树，由具有3个元素的列表实现：**

  第1个元素为根节点的值；

  第2个元素是左子树（所以第2个元素是一个列表）；

  第3个元素是右子树（所以第3个元素也是一个列表）。



- **以右图的示例，一个6节点的二叉树**

  根是myTree[0]，左子树myTree[1]，右子树myTree[1]

- **嵌套列表法的优点**

  子树的结构与树相同，是一种递归数据结构

  可以很容易扩展到多叉树，仅需要增加列表元素即可

```
myTree = ['a',   #root
          ['b',  #left subtree
           ['d' [], []],
           ['e' [], [] ],
          ['c',  #right subtree
           ['f' [], []],
           [] ]
         ]
```

实现树：嵌套列表法

- **我们通过定义一系列函数来辅助操作嵌套列表**

  BinaryTree创建仅有根节点的二叉树

  insertLeft/insertRight将新节点插入树中作为其直接的左/右子节点

  get/setRootVal则取得或返回根节点

  getLeft/RightChild返回左/右子树

```
def BinaryTree(r):
    return [r, [], []]

def insertLeft(root,newBranch):
    t = root.pop(1)
    if len(t) > 1:
        root.insert(1,[newBranch,t,[]])
    else:
        root.insert(1,[newBranch, [], []])
    return root

def insertRight(root,newBranch):
    t = root.pop(2)
    if len(t) > 1:
        root.insert(2,[newBranch,[],t])
    else:
        root.insert(2,[newBranch,[],[]])
    return root

def getRootVal(root):
    return root[0]

def setRootVal(root,newVal):
    root[0] = newVal

def getLeftChild(root):
    return root[1]

def getRightChild(root):
    return root[2]
```

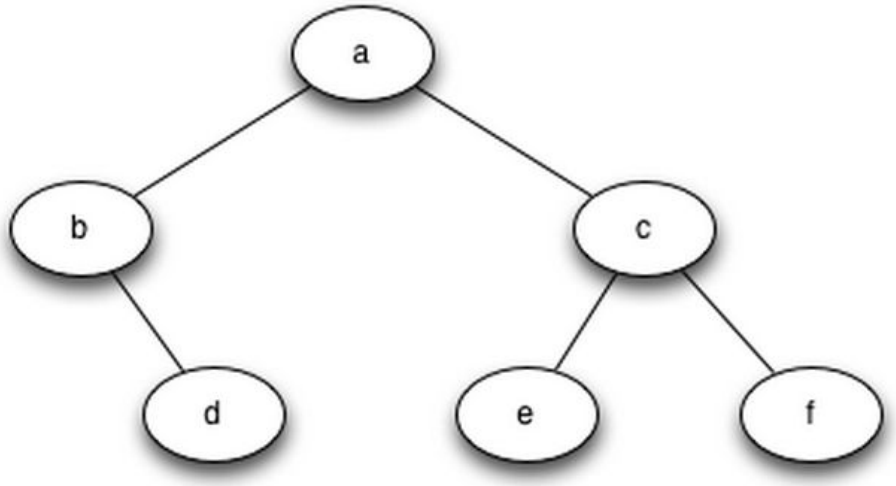
实现树：嵌套列表法

- 请画出r的图示
- 请通过图示讲解操作

```
r = BinaryTree(3)
insertLeft(r,4)
insertLeft(r,5)
insertRight(r,6)
insertRight(r,7)
l = getLeftChild(r)
print(l)

setRootVal(l,9)
print(r)
insertLeft(l,11)
print(r)
print(getRightChild(getRightChild(r)))
```

```
>>>
[5, [4, [], []], []]
[3, [9, [4, [], []], []], [7, [], [6, [], []]]]
[3, [9, [11, [4, [], []], []], []], [7, [], [6, [], []]]]
[6, [], []]
>>>
```

随堂作业6-1



- **执行如下代码之后，树的内容为**

```
x = BinaryTree('a')
insertLeft(x,'b')
insertRight(x,'c')
insertRight(getRightChild(x),'d')
insertLeft(getRightChild(getRightChild(x)),'e')
```

a) ['a', ['b', [], []], ['c', [], ['d', [], []]]]

b) ['a', ['c', [], ['d', ['e', [], []], []]], ['b', [], []]]

c) ['a', ['b', [], []], ['c', [], ['d', ['e', [], []], []]]]

d) ['a', ['b', [], ['d', ['e', [], []], []]], ['c', [], []]]

- **写一个buildTree函数，通过调用上述嵌套列表操作函数，生成如图所示的树**

实现树：节点链接法

- **同样可以用类似链表的节点链接法来实现树**

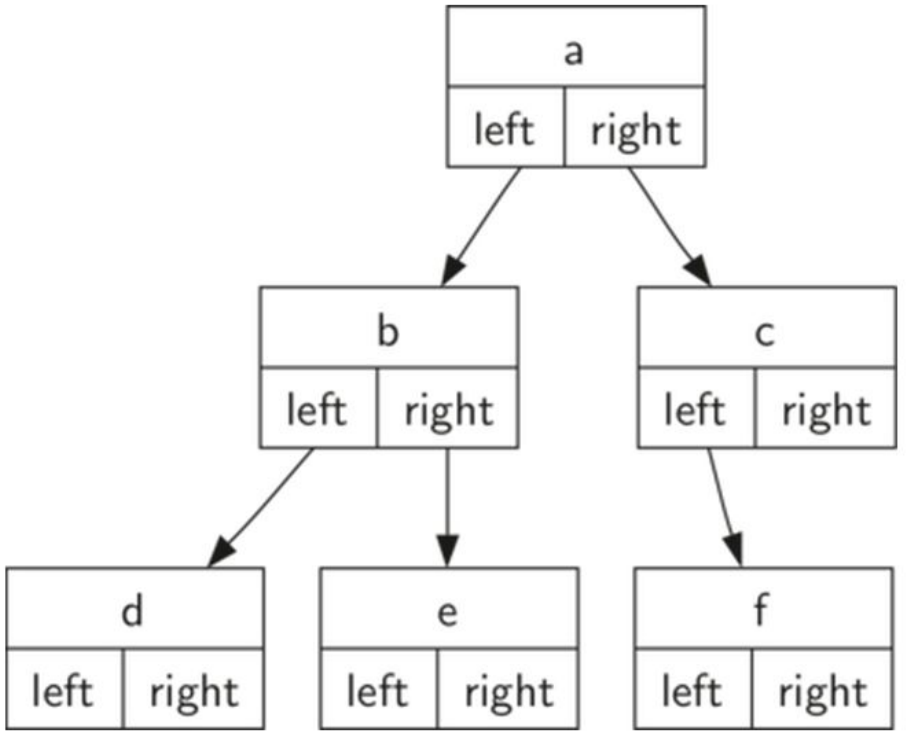
  每个节点保存根节点的数据项，以及指向左右子树的链接

- **定义一个BinaryTree类**

  成员key保存根节点数据项

  成员left/rightChild则保存指向左/右子树的引用（同样是BinaryTree对象）

```
class BinaryTree:
    def __init__(self,rootObj):
        self.key = rootObj
        self.leftChild = None
        self.rightChild = None
```



实现树：节点链接法

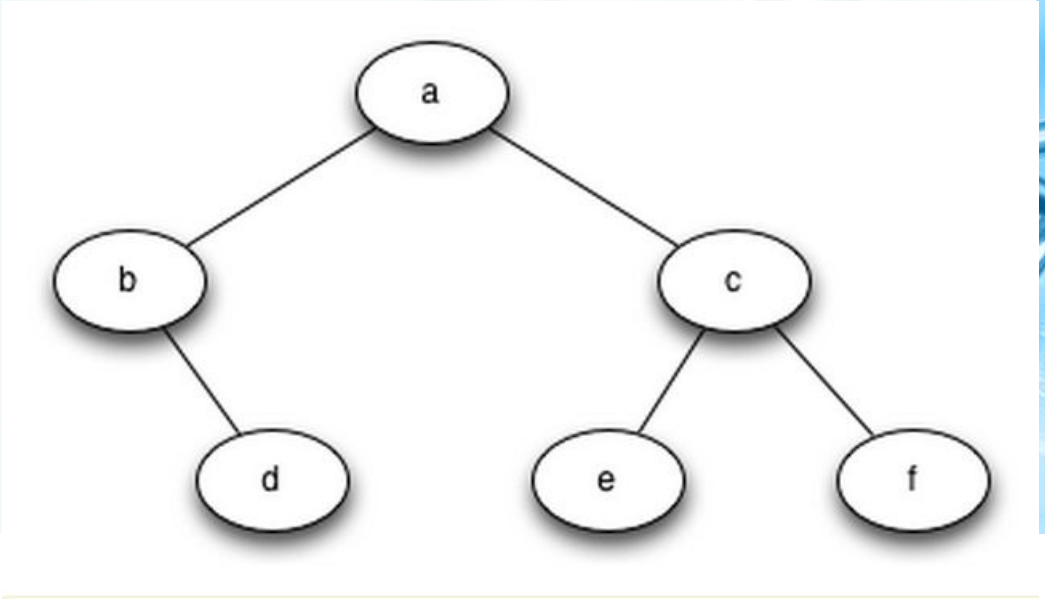
- **insertLeft/Right方法**
  过程与线性表的节点插入相似
- **请画出r的图示**

```
r = BinaryTree('a')
r.insertLeft('b')
r.insertRight('c')
r.getRightChild().setRootVal('hello')
r.getLeftChild().insertRight('d')
```

```
def insertLeft(self,newNode):
    if self.leftChild == None:
        self.leftChild = BinaryTree(newNode)
    else:
        t = BinaryTree(newNode)
        t.leftChild = self.leftChild
        self.leftChild = t

def insertRight(self,newNode):
    if self.rightChild == None:
        self.rightChild = BinaryTree(newNode)
    else:
        t = BinaryTree(newNode)
        t.rightChild = self.rightChild
        self.rightChild = t

def getRightChild(self):
    return self.rightChild

def getLeftChild(self):
    return self.leftChild

def setRootVal(self,obj):
    self.key = obj

def getRootVal(self):
    return self.key
```

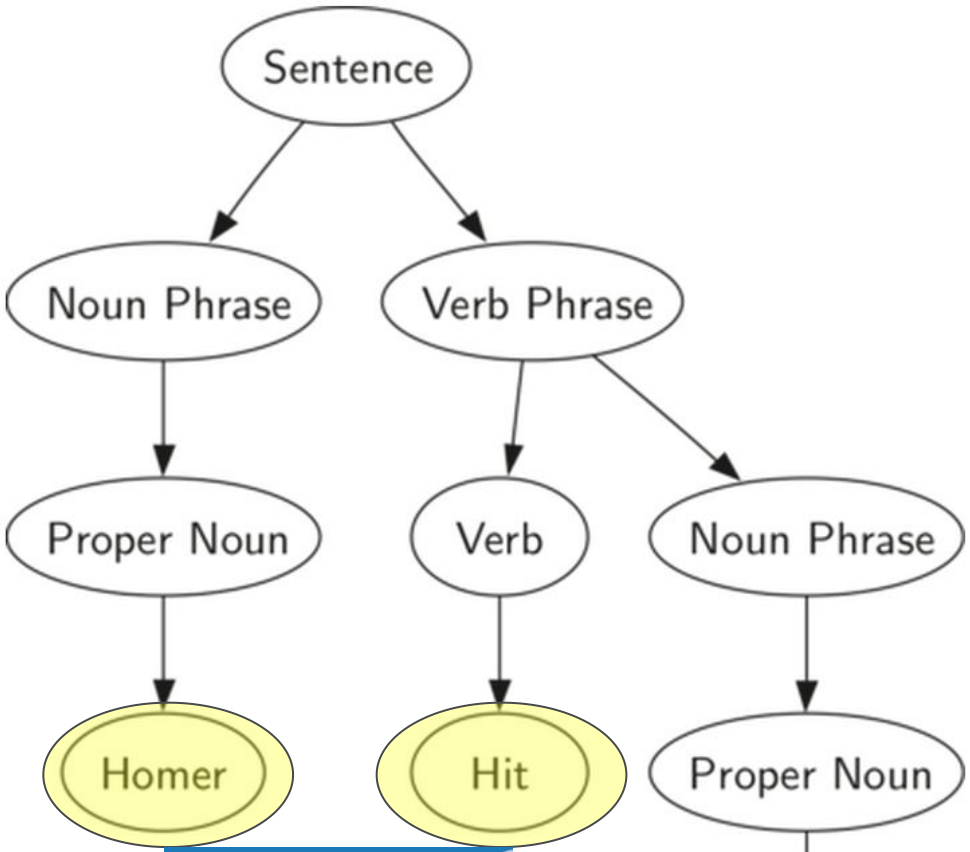
随堂作业6-1

- 写一个buildTree函数，通过调用BinaryTree类方法，生成如图所示的二叉树
- 为BinaryTree类写__str__方法，实现以嵌套列表方式打印输出二叉树的内容



树的应用：解析树Parse Tree（语法树）

- **将树用于表示语言中句子，可以分析句子的各种语法成分，对句子的各种成分进行处理**
- **语法分析树**
  主谓宾，定状补
- **程序设计语言的编译**
  词法、语法检查
  从语法树生成目标代码
- **自然语言处理**
  机器翻译、语义理解



树的应用：解析树Parse Tree（表达式树）

- **我们还可以将表达式表示为树结构**

  叶节点保存操作数，内部节点保存操作符

- **全括号表达式((7+3)*(5-2))**

  由于括号的存在，需要计算*的话，就必须先计算7+3和5-2

  表达式树的层次帮助我们了解表达式计算的优先级

  越底层的表达式，优先级越高

- **树中每个子树都表示一个子表达式**

  将子树替换为子表达式值的节点，即可实现求值

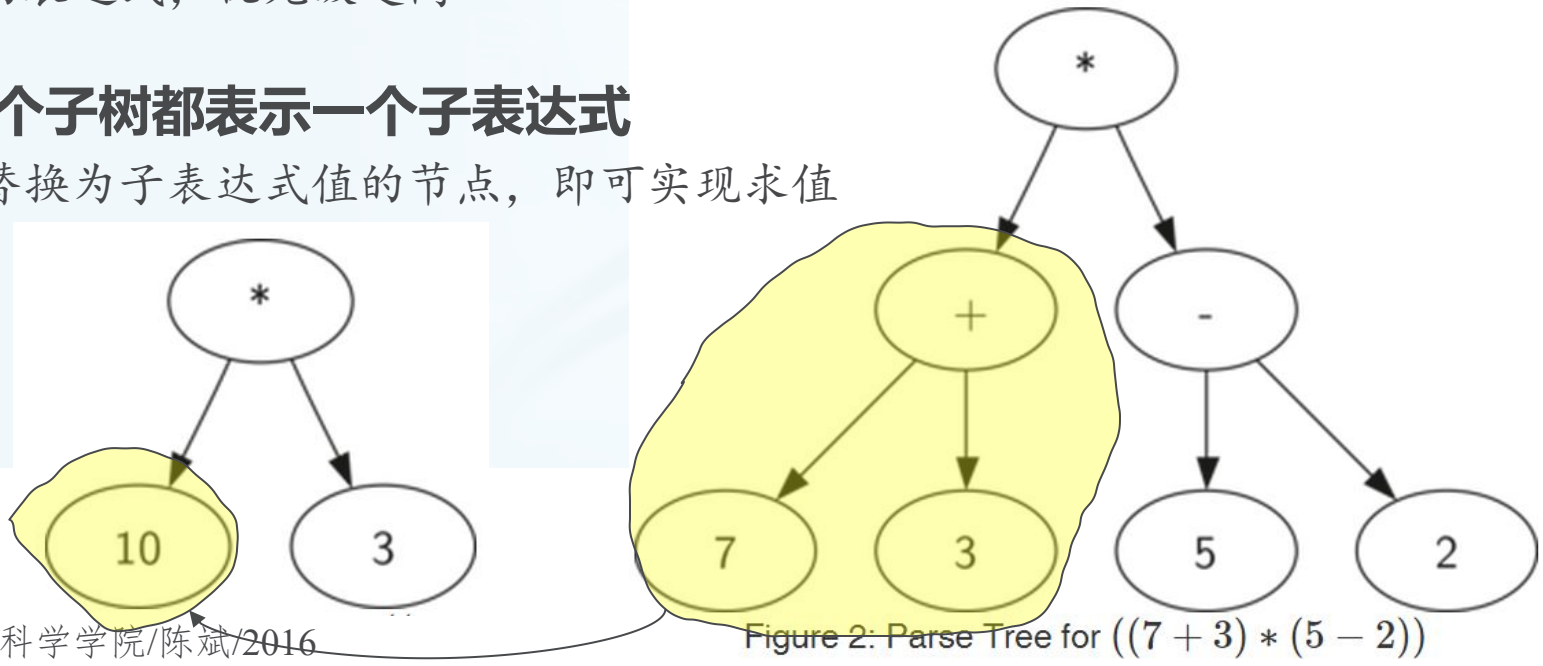


Figure 2: Parse Tree for $((7+3)*(5-2))$

树的应用：表达式树

- **下面，我们用树结构来做如下尝试**

  从全括号表达式构建表达式解析树

  利用表达式解析树对表达式求值

  从表达式解析树恢复原表达式的字符串形式

- **首先，全括号表达式要分解为单词Token列表**

  其单词分为括号“（）”、操作符“+-*/”和操作数“0～9”这几类

  左括号就是表达式的开始，而右括号是表达式的结束

- **从左到右扫描全括号表达式的每个单词，依据规则建立解析树**

  如果当前单词是"("，为当前节点添加一个新节点作为其左子节点，当前节点下降，设为这个新节点

  如果当前单词是操作符['+','-','/','*']，将当前节点的值设为此符号，为当前节点添加一个新节点作为其右子节点，当前节点下降，设为这个新节点

  如果当前单词是操作数，将当前节点的值设为此数，当前节点上升返回到父节点

  如果当前单词是")"，则当前节点上升返回到父节点

从全括号表达式建立表达式解析树：图示

- **全括号表达式：(3+(4*5))**

  分解为单词表['(', '3', '+', '(', '4', '*', '5' ,')',')']

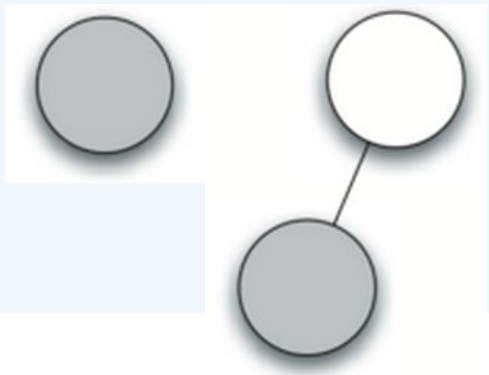
- **创建表达式解析树过程**

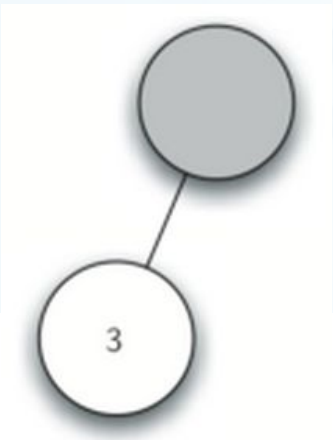
  创建空树，当前节点为根节点

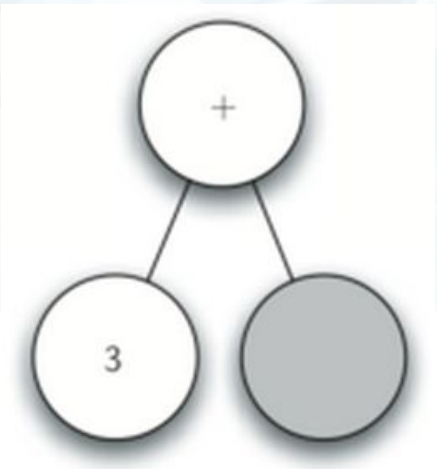
  读入'('，创建了左子节点，当前节点下降

  读入'3'，当前节点设置为3，上升到父节点

  读入'+'，当前节点设置为+，创建右子节点，当前节点下降







从全括号表达式建立表达式解析树：图示

- **创建表达式解析树过程**

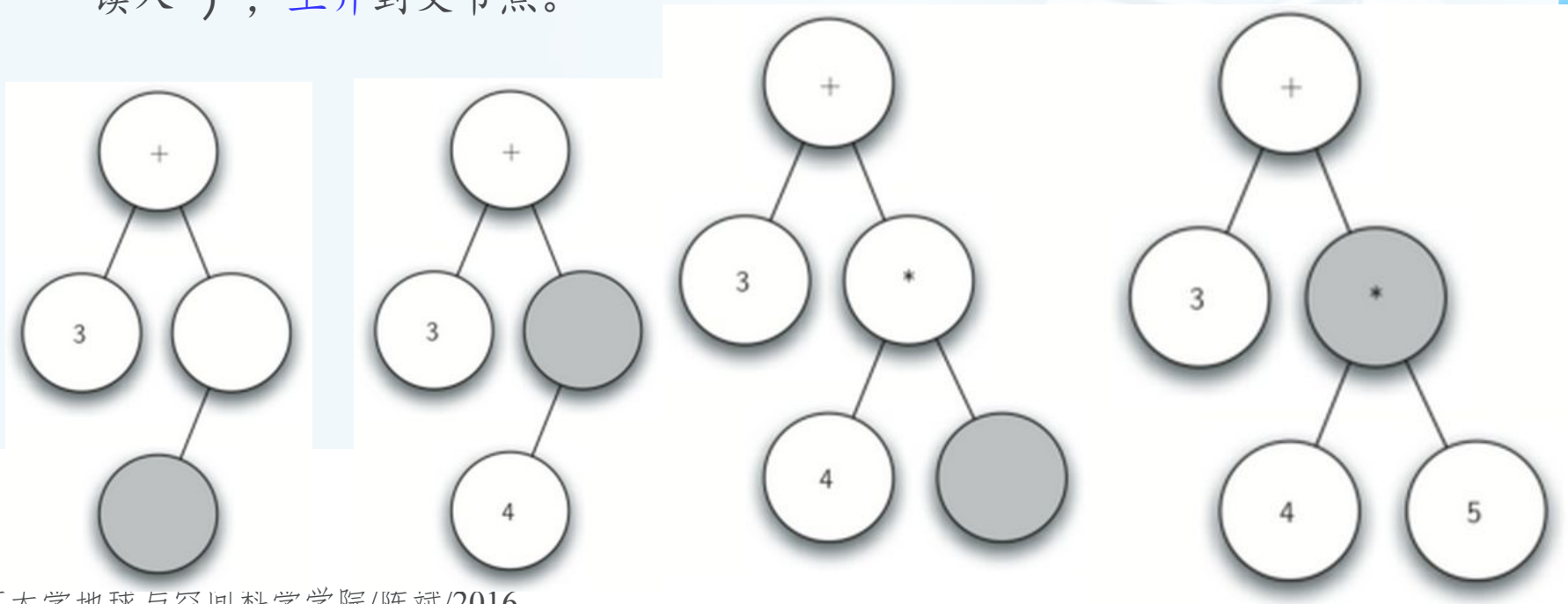
  读入'('，创建左子节点，当前节点下降

  读入'4'，当前节点设置为4，上升到父节点

  读入'*'，当前节点设置为*，创建右子节点，当前节点下降

  读入'5'，当前节点设置为5，上升到父节点

  读入')'，上升到父节点。



从全括号表达式建立表达式解析树：思路

- **从图示过程中我们看到，创建树过程中关键的是对当前节点的跟踪**

  当前节点创建左右子树，可以调用BinaryTree.insertLeft/Right

  当前节点设置值，可以调用BinaryTree.setRootVal

  当前节点下降到左右子树，可以调用BinaryTree.getLeft/RightChild

  但是，当前节点上升到父节点，这个没有方法支持！

- **我们可以用一个栈来记录跟踪父节点**

  当前节点下降时，将下降前的节点push入栈

  当前节点需要上升到父节点时，上升到pop出栈的节点即可！

从全括号表达式建立表达式解析树：代码

分解单词

空树

表达式开始

操作数

操作符

表达式结束

```
def buildParseTree(fpexp):
    fplist = fpexp.split()
    pStack = Stack()
    eTree = BinaryTree('')
    pStack.push(eTree)
    currentTree = eTree
    for i in fplist:
        if i == '(':
            currentTree.insertLeft('')
            pStack.push(currentTree)
            currentTree = currentTree.getLeftChild()
        elif i not in ['+', '-', '*', '/', ')']:
            currentTree.setRootVal(int(i))
            parent = pStack.pop()
            currentTree = parent
        elif i in ['+', '-', '*', '/']:
            currentTree.setRootVal(i)
            currentTree.insertRight('')
            pStack.push(currentTree)
            currentTree = currentTree.getRightChild()
        elif i == ')':
            currentTree = pStack.pop()
        else:
            raise ValueError
    return eTree
```

入栈下降

入栈下降

出栈上升

出栈上升

利用表达式解析树求值：思路

- **创建了表达式解析树之后，我们可以用来进行表达式求值**
- **由于BinaryTree是一个递归数据结构，自然地，可以用递归算法来处理BinaryTree，包括求值函数evaluate**

  由前述对子表达式的描述，可以从树的底层子树开始，逐步向上层求值，最终得到整个表达式的值

- **求值函数evaluate的递归三要素：**

  基本结束条件：叶节点是最简单的子树，没有左右子节点，其根节点的数据项即为子表达式树的值

  缩小规模：将表达式树分为左子树、右子树，即为缩小规模

  调用自身：分别调用evaluate计算左子树和右子树的值，其基本操作是将左右子树的值依根节点的操作符进行计算，从而得到表达

- **一个增加程序可读性的Python技巧：函数引用**

```
import operator

op= operator.add
```

```
>>> import operator
>>> operator.add
<built-in function add>
>>> operator.add(1,2)
3
>>> op= operator.add
>>> n= op(1,2)
>>> n
3
```

利用表达式解析树求值：代码


```
import operator
def evaluate(parseTree):
    opers = {'+':operator.add, '-':operator.sub, \
             '*':operator.mul, '/':operator.truediv}

    leftC = parseTree.getLeftChild()
    rightC = parseTree.getRightChild()

    if leftC and rightC:
        fn = opers[parseTree.getRootVal()]
        return fn(evaluate(leftC),evaluate(rightC))
    else:
        return parseTree.getRootVal()
```

缩小规模

递归调用

基本结束条件

树的遍历Tree Traversals

- **线性数据结构中，对其所有数据项的访问比较简单直接，对树中所有节点进行访问的操作称为“遍历Traversal”**
- **树的非线性特点，使得遍历操作较为复杂，我们按照对节点访问次序的不同来区分3种遍历**

  前序遍历（preorder）：先访问根节点，再递归地前序访问左子树、最后前序访问右子树；

  中序遍历（inorder）：先递归地中序访问左子树，再访问根节点，最后中序访问右子树；

  后序遍历（postorder）：先递归地后序访问左子树，再后序访问右子树，最后访问根节点。

前序遍历的例子：一本书的章节阅读

- Book-> Ch1-> S1.1-> S1.2-> S1.2.1-> S1.2.2->
- Ch2-> S2.1-> S2.2-> S2.2.1-> S2.2.2

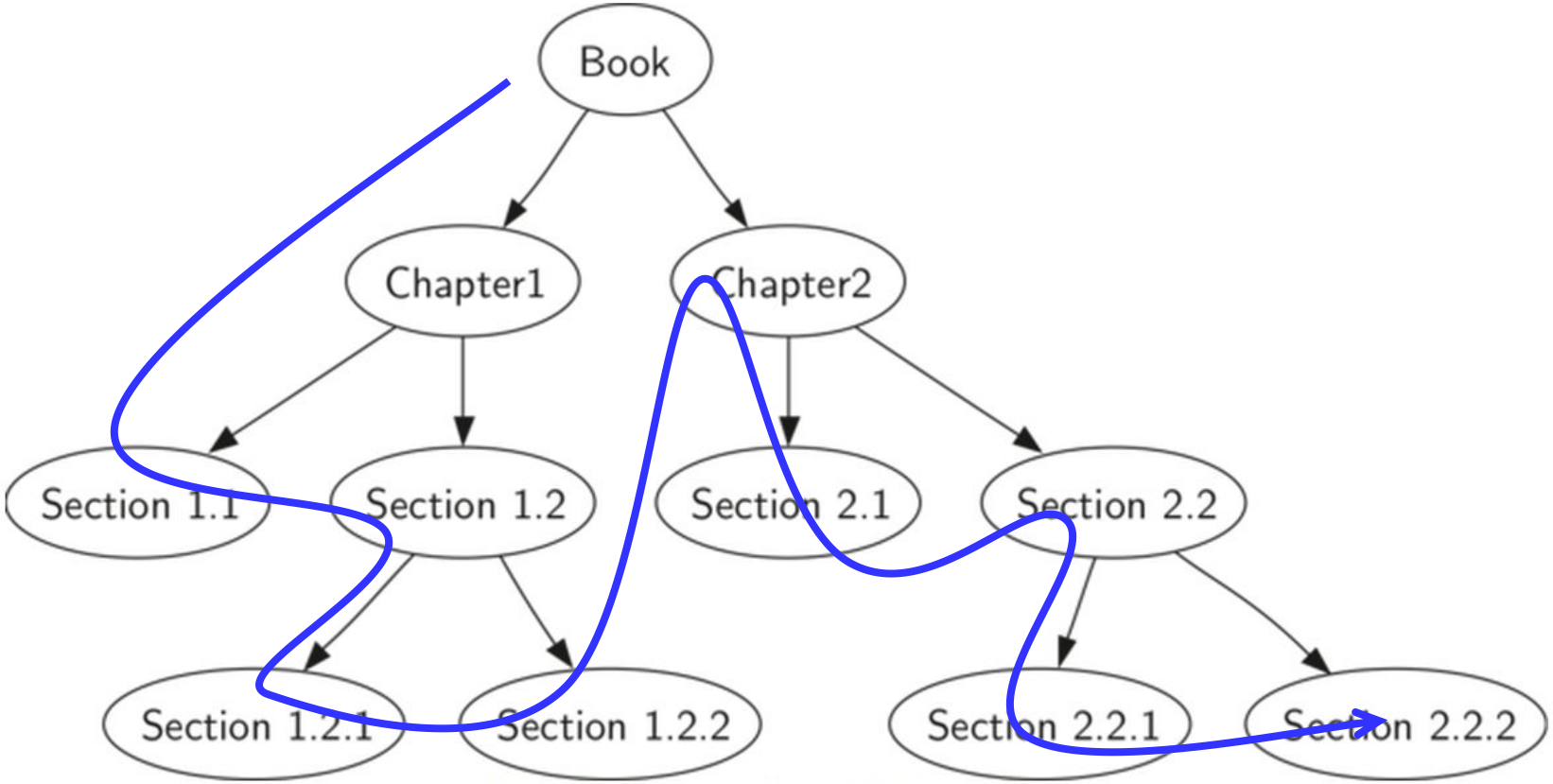


Figure 5: Representing a Book as a Tree

树的遍历：递归算法代码

- 树遍历的代码非常简洁！

```
def preorder(tree):
    if tree:
        print(tree.getRootVal())
        preorder(tree.getLeftChild())
        preorder(tree.getRightChild())
```

- 也可以在BinaryTree中实现前序遍历的方法：

需要加入子树是否为空的判断

```
def preorder(self):
    print(self.key)
    if self.leftChild:
        self.leftChild.preorder()
    if self.rightChild:
        self.rightChild.preorder()
```

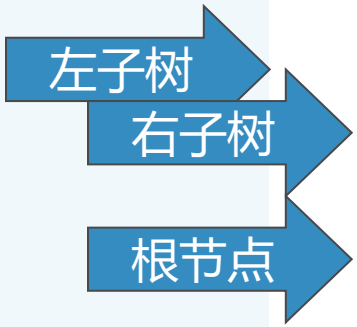
- 后序遍历和中序遍历的代码仅需要调整语句顺序：

```
def postorder(tree):
    if tree != None:
        postorder(tree.getLeftChild())
        postorder(tree.getRightChild()
        print(tree.getRootVal())
```

```
def inorder(tree):
    if tree != None:
        inorder(tree.getLeftChild())
        print(tree.getRootVal())
        inorder(tree.getRightChild())
```

后序遍历：表达式求值

- 回顾前述的表达式解析树求值，实际上也是一个后序遍历的过程，只是代码没有明显表现出遍历的次序
- 采用后序遍历法重写表达式求值代码：




```
def postordereval(tree):
    opers = {'+':operator.add, '-':operator.sub, \
             '*':operator.mul, '/':operator.truediv}
    res1 = None
    res2 = None
    if tree:
        res1 = postordereval(tree.getLeftChild())
        res2 = postordereval(tree.getRightChild())
        if res1 and res2:
            return opers[tree.getRootVal()](res1,res2)
        else:
            return tree.getRootVal()
```

中序遍历：生成全括号中缀表达式

- **采用中序遍历递归算法来生成全括号中缀表达式**

  下列代码中对每个数字也加了括号，请自行修改代码去除（课后练习）

```
def printexp(tree):
  sVal = ""
  if tree:
      sVal = '(' + printexp(tree.getLeftChild())
      sVal = sVal + str(tree.getRootVal())
      sVal = sVal + printexp(tree.getRightChild())+')'
  return sVal
```

优先队列Priority Queue

- **在第3章我们学习了一种FIFO数据结构队列queue，队列有一种变体称为“优先队列”。**

  银行窗口取号，VIP客户优先级高，可以插到队首

  操作系统中执行关键任务的进程或用户特别指定进程在调度队列中靠前

- **优先队列的出队dequeue操作跟队列一样，都是从队首出队；**

- **但在优先队列内部，数据项的次序却是由“优先级”来确定：高优先级的数据项排在队首，而低优先级的数据项则排在后面。**

  这样，优先队列的入队操作就比较复杂，需要将数据项根据其优先级尽量挤到队列前方。

- **思考：有什么方案可以用来实现优先队列？**

  出队和入队的复杂度大概是多少？

二叉堆Binary Heap实现优先队列

- **实现优先队列的经典方案是采用二叉堆数据结构**
  二叉堆能够将优先队列的入队和出队复杂度都保持在O(log n)

- **二叉堆的有趣之处在于，其逻辑结构上象二叉树，却是用非嵌套的列表来实现的！**

- **最小key排在队首的称为“最小堆min heap”**
  反之，最大key排在队首的是“最大堆max heap”

- **ADT BinaryHeap的操作定义如下：**
  BinaryHeap(): 创建一个空二叉堆对象;
  insert(k): 将新key加入到堆中;
  findMin(): 返回堆中的最小项，最小项仍保留在堆中;
  delMin(): 返回堆中的最小项，同时从堆中删除;
  isEmpty(): 返回堆是否为空;
  size(): 返回堆中key的个数;
  buildHeap(list): 从一个key列表创建新堆

ADT BinaryHeap的操作示例

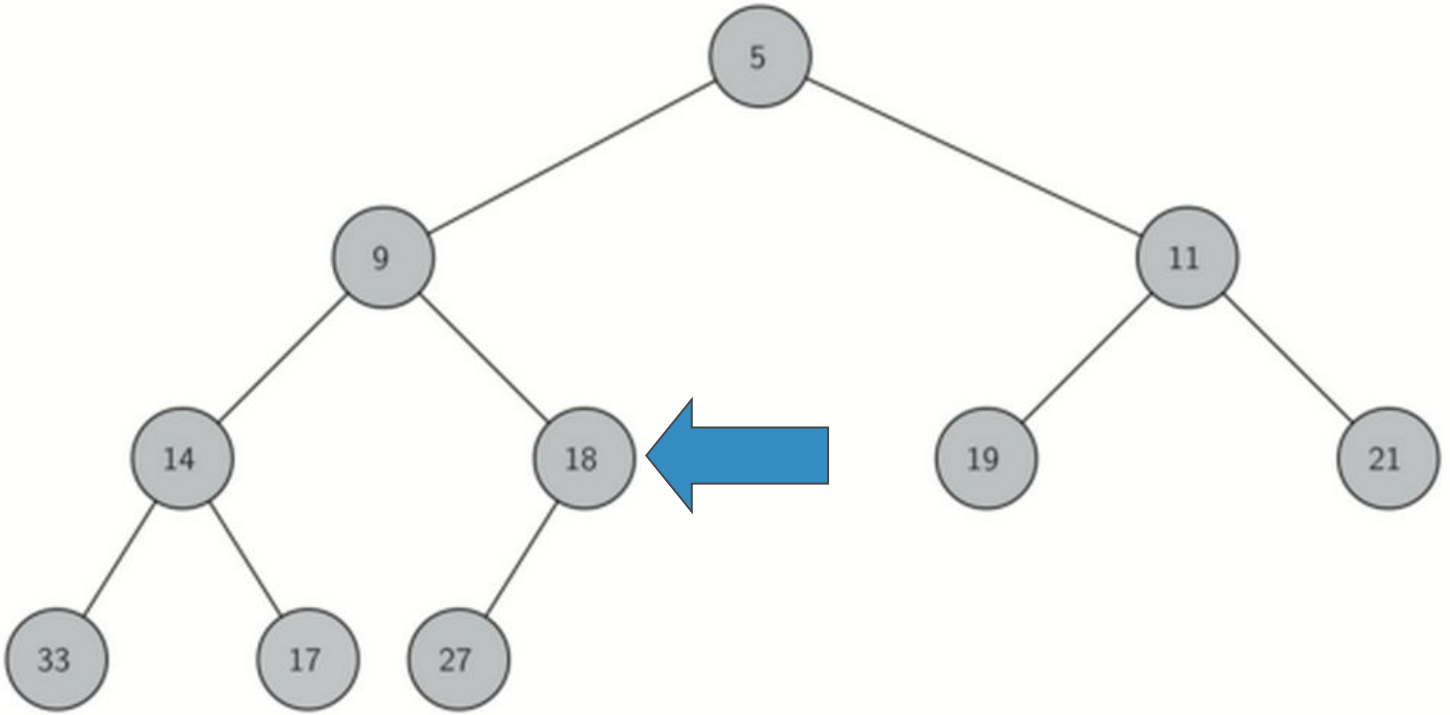

```
from pythonds.trees.binheap import BinHeap

bh = BinHeap()
bh.insert(5)
bh.insert(7)
bh.insert(3)
bh.insert(11)

print(bh.delMin())
print(bh.delMin())
print(bh.delMin())
print(bh.delMin())
```

```
>>> ========
>>>
3
5
7
11
>>>
```

用非嵌套列表实现二叉堆

- 为了使堆操作能保持在对数水平上，就必须采用二叉树结构；
- 同样，如果要使操作始终保持在对数数量级上，就必须始终保持二叉树的“平衡”——树根左右子树拥有相同数量的节点
- 我们采用“完全二叉树”的结构来近似实现“平衡”

完全二叉树，指每个内部节点都有两个子节点，最多可有1个节点例外

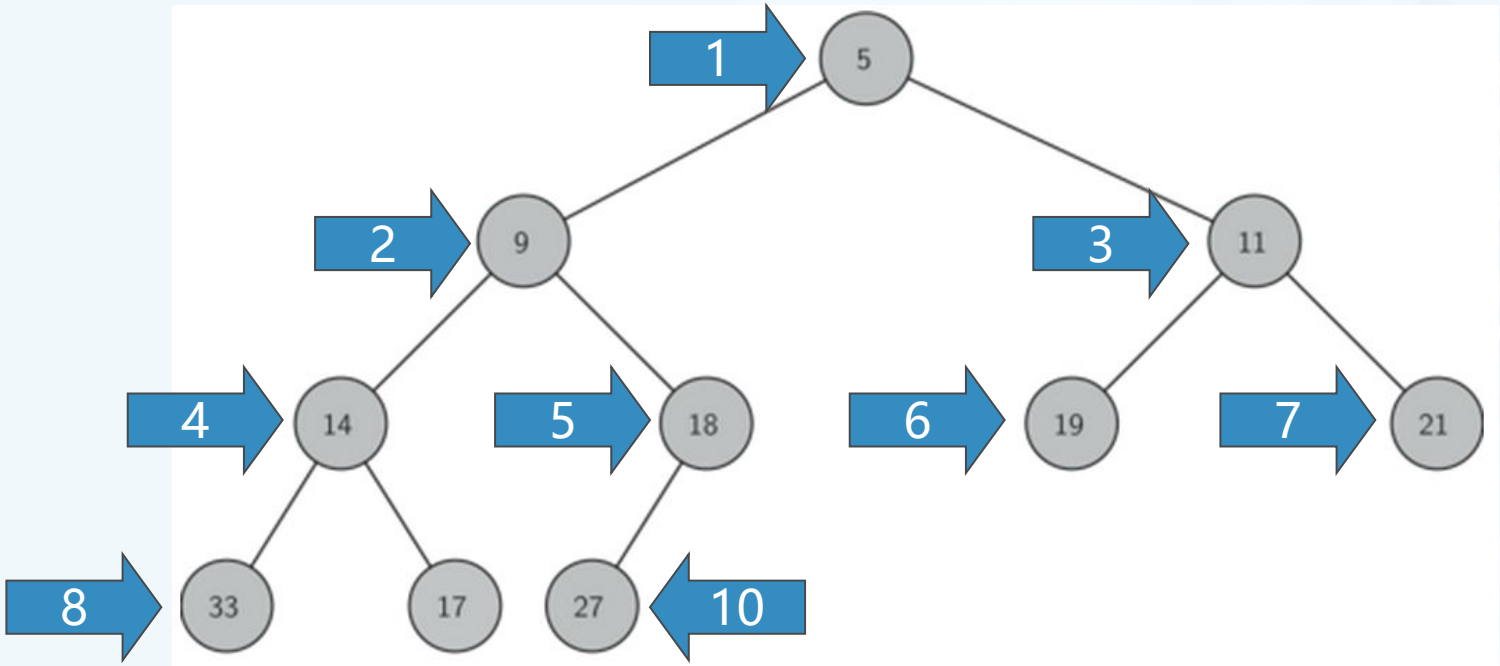


完全二叉树的列表实现及性质

- **完全二叉树由于其特殊性，可以用非嵌套列表，以简单的方式实现，并具有很好的性质：**

  如果节点在列表中的下标为p，那么其左子节点下标为2p，右子节点为2p+1

  如果节点在列表中下标为n，那么其父节点下标为n//2



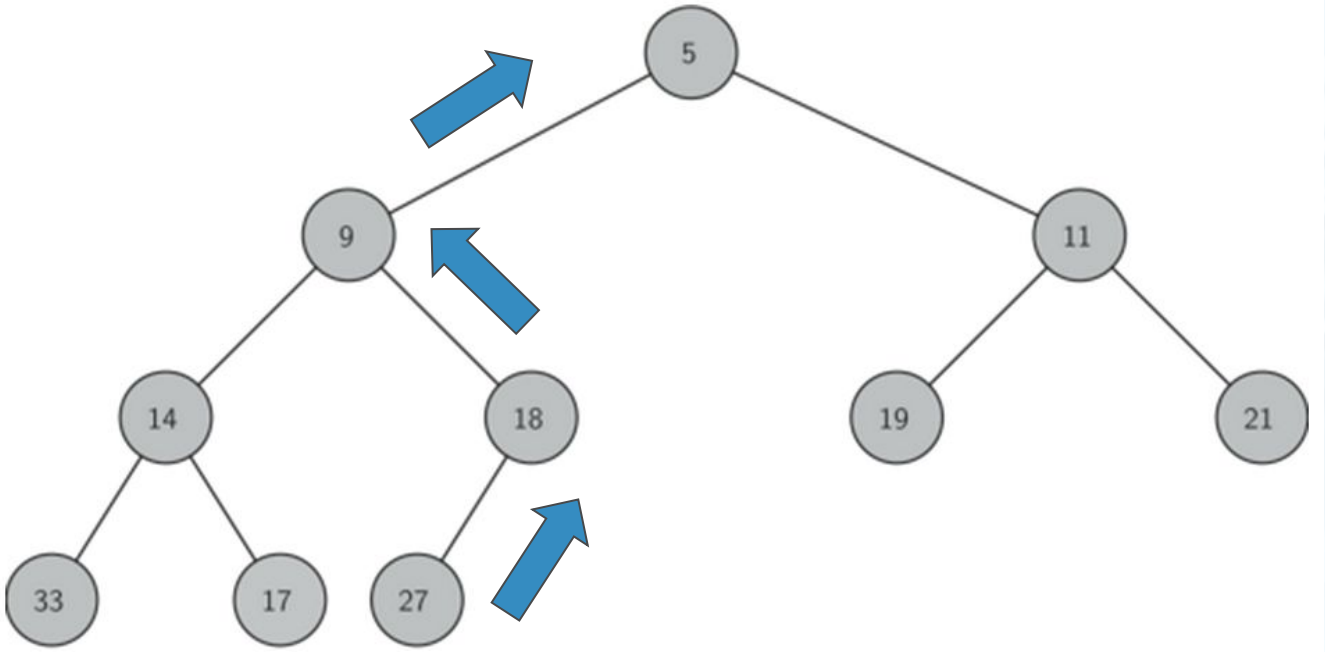
0	5	9	11	14	18	19	21	33	17	27	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

堆次序Heap Order

- **所谓“堆”的特性，是指堆中任何一个节点x，其父节点p中的key均小于等于x中的key。**

  这样，符合“堆”性质的二叉树，其中任何一条路径，均是一个已排序数列

  符合“堆”性质的二叉树，其树根节点中的key最小



0	5	9	11	14	18	19	21	33	17	27	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

二叉堆操作的实现

- **二叉堆初始化**

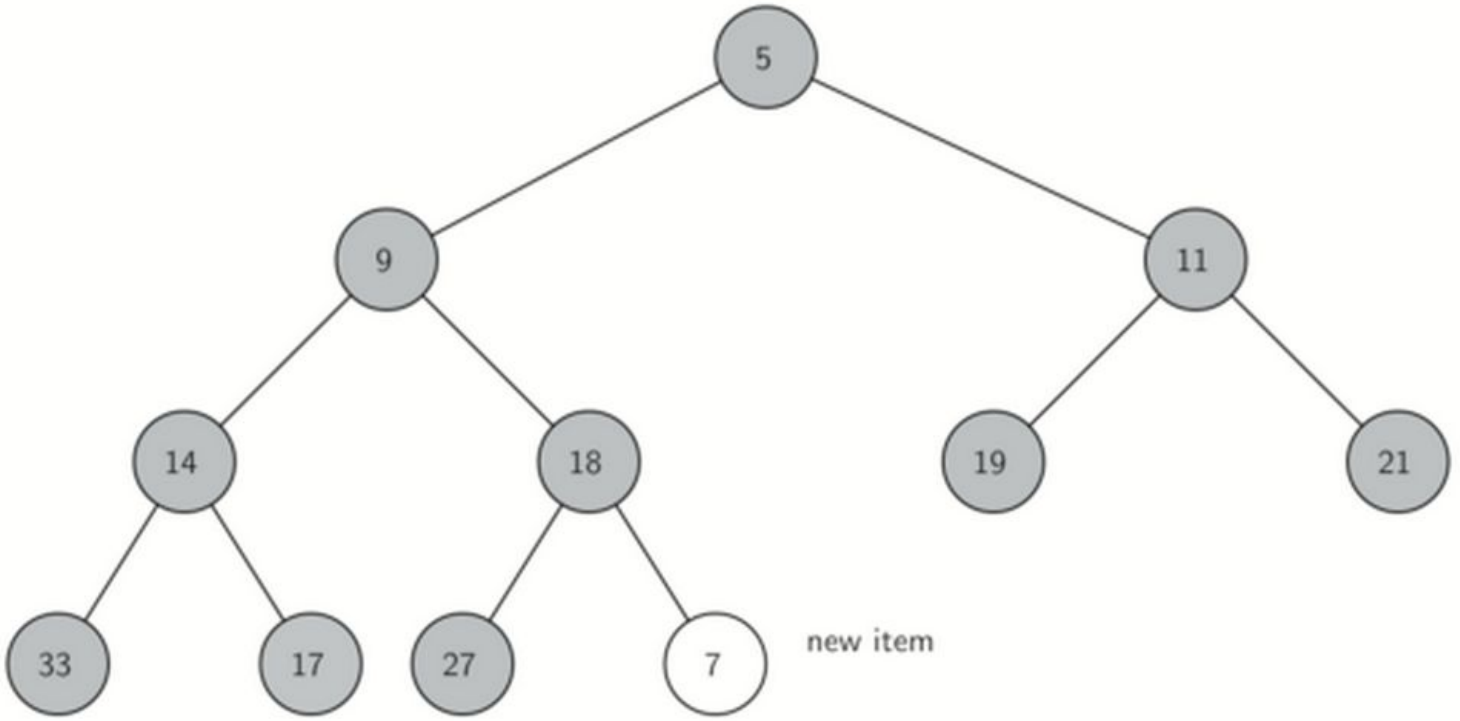
  采用一个列表来保存堆数据，其中表首下标为0的项无用，但为了后面代码可以用到简单的整数乘除法，仍保留它。

```
class BinHeap:
    def __init__(self):
        self.heapList = [0]
        self.currentSize = 0
```

- **insert(key)方法**

  首先，为了保持“完全二叉树”的性质，新key应该添加到列表末尾

  问题？



二叉堆操作的实现

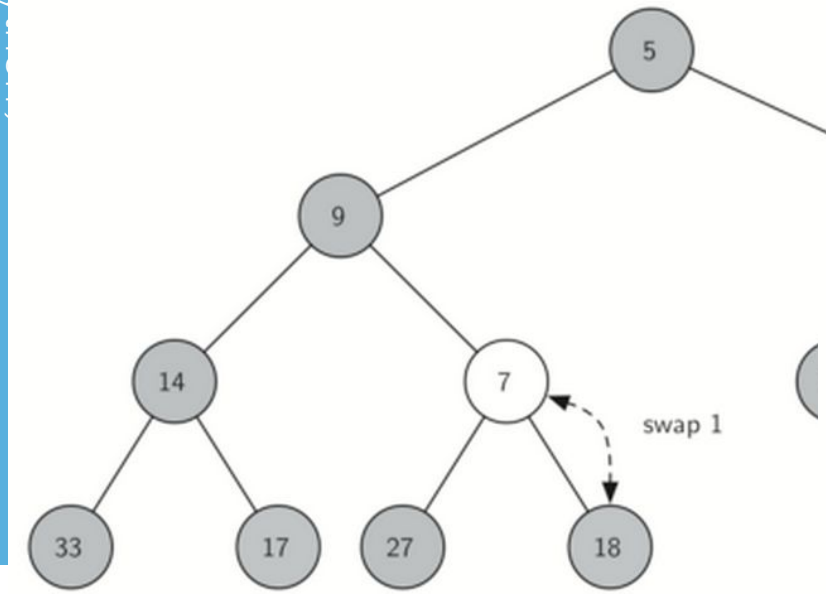
- **insert(key)方法**

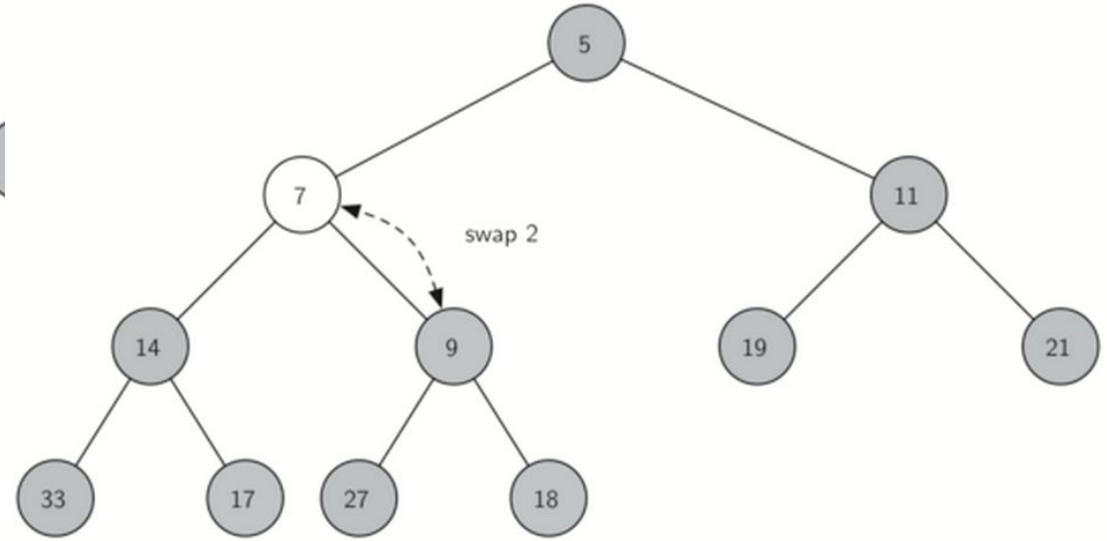
  但是，新key简单地加在列表末尾，显然无法保持“堆”次序

  虽然对其它路径的次序没有影响，但对于其到根的路径可能破坏次序

  于是需要将新key沿着路径来“上浮”到其正确位置

  注意：新key的“上浮”不会影响其它路径节点的“堆”次序





二叉堆操作的实现：insert代码


```
def percUp(self,i):
    while i // 2 > 0:
        if self.heapList[i] < self.heapList[i//2]:
            tmp = self.heapList[i // 2]
            self.heapList[i // 2] = self.heapList[i]
            self.heapList[i] = tmp
        i = i // 2

def insert(self,k):
    self.heapList.append(k)
    self.currentSize = self.currentSize + 1
    self.percUp(self.currentSize)
```

与父节点交换

沿路径向上

添加到末尾

新key上浮

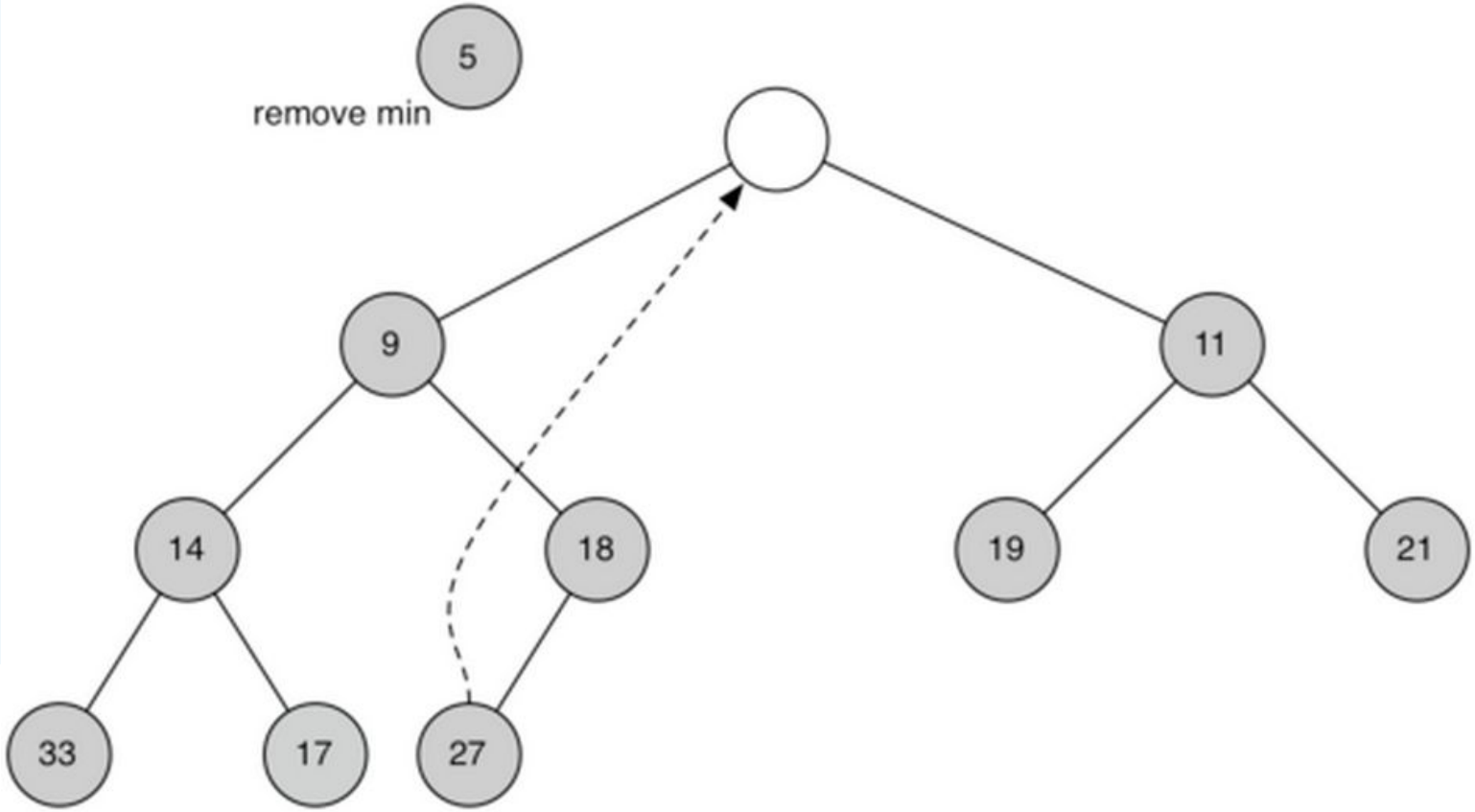
二叉堆操作的实现

- **delMin()方法**

  首先，移走整个堆中最小的key——位于堆首位的根节点heapList[1]

  为了保持“完全二叉树”的性质，用最后一个节点来代替根节点

  问题？



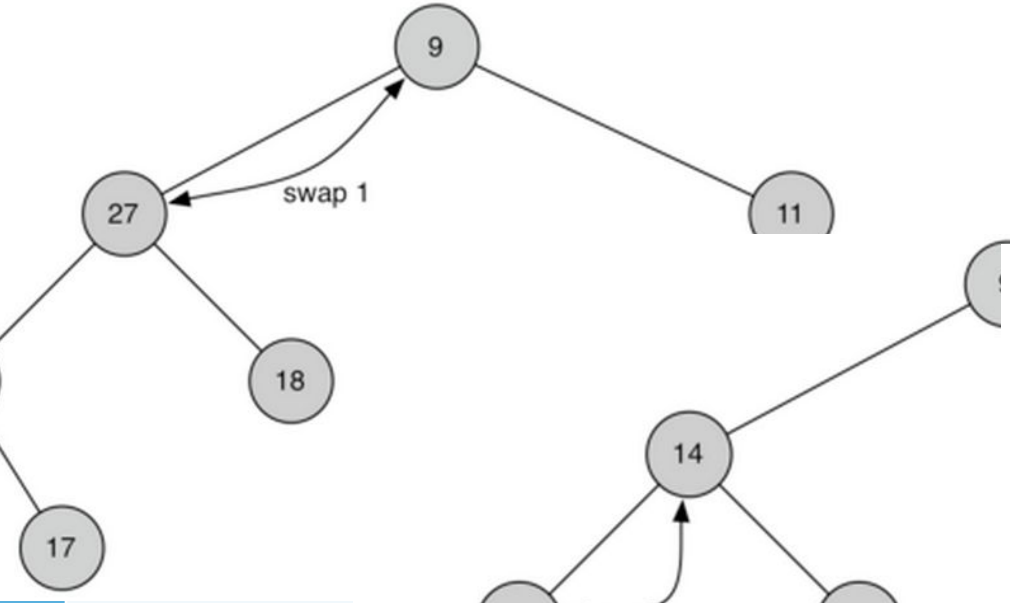
二叉堆操作的实现

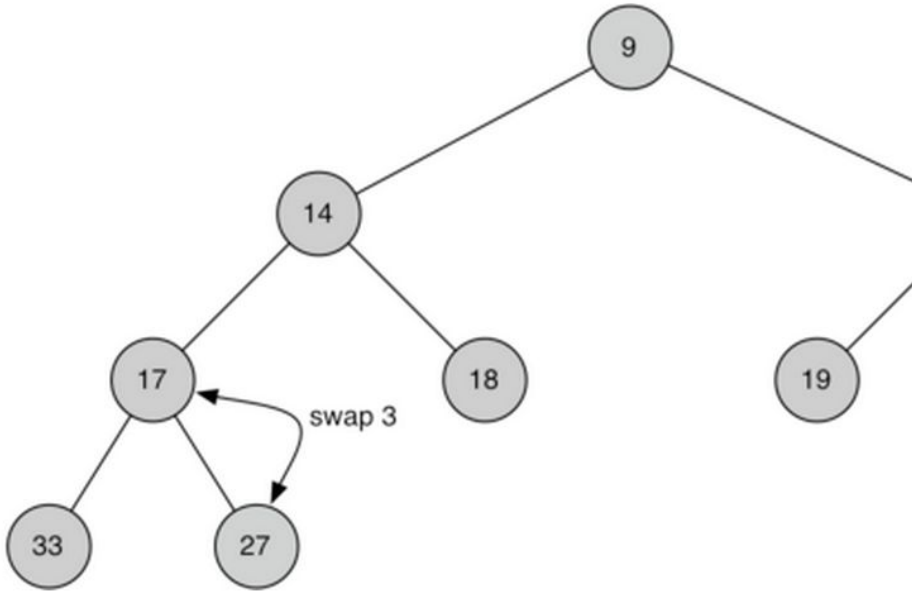
- **delMin()方法**

  同样，这么简单的替换，还是破坏了“堆”次序

  解决方法：将新的根节点沿着一条路径“下沉”，直到比两个子节点都小

  “下沉”路径的选择：如果比子节点大，那么选择较小的子节点交换下沉





二叉堆操作的实现：delMin代码


```
def percDown(self,i):
    while (i * 2) <= self.currentSize:
        mc = self.minChild(i)
        if self.heapList[i] > self.heapList[mc]:
            tmp = self.heapList[i]
            self.heapList[i] = self.heapList[mc]
            self.heapList[mc] = tmp
        i = mc

def minChild(self,i):
    if i * 2 + 1 > self.currentSize:
        return i * 2
    else:
        if self.heapList[i * 2] < self.heapList[i * 2 + 1]:
            return i * 2
        else:
            return i * 2 + 1
def delMin(self):
    retval = self.heapList[1]
    self.heapList[1] = self.heapList[self.currentSize]
    self.currentSize = self.currentSize - 1
    self.heapList.pop()
    self.percDown(1)
    return retval
```

交换下沉

沿路径向下

唯一子节点

返回较小的

移走堆顶

新顶下沉

二叉堆操作的实现

- **buildHeap(lst)方法：从无序表生成“堆”**

  我们最自然的想法是：用insert(key)方法，将无序表中的数据项逐个insert到堆中，但这么做的总代价是O(nlog n)

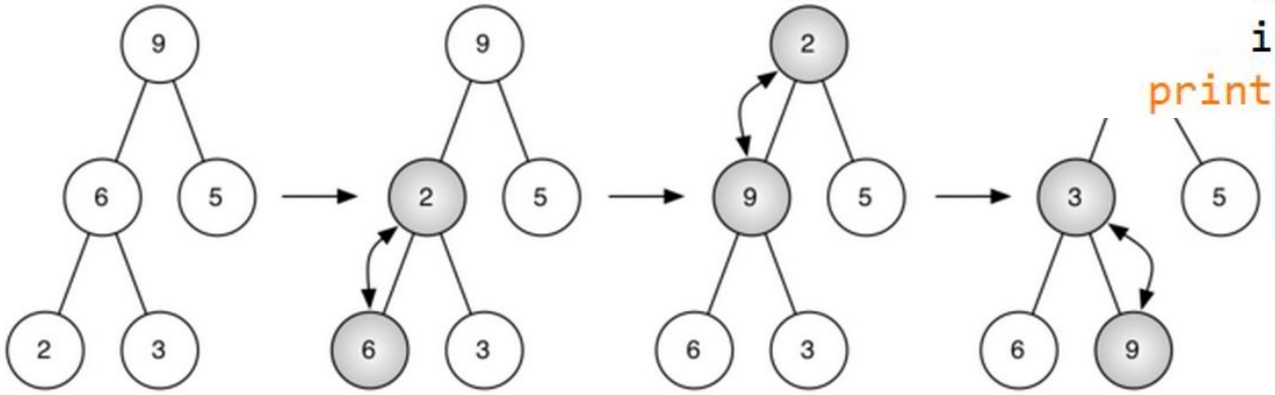
  其实，用“下沉”法，能够将总代价控制在O(n)

从最后节点的父节点开始
因叶节点无需下沉

```
def buildHeap(self,alist):
    i = len(alist) // 2
    self.currentSize = len(alist)
    self.heapList = [0] + alist[:]
    print(len(self.heapList), i)
    while (i > 0):
        print(self.heapList, i)
        self.percDown(i)
        i = i - 1
    print(self.heapList,i)
```

- **思考：利用二叉堆来进行排序？**

  “堆排序”算法：O(nlog n)



随堂作业6-2

- 利用BinHeap类，实现一个排序算法HeapSort(lst)

二叉搜索树Binary Search Tree

- **在ADT Map的实现方案中，可以采用不同的数据结构和搜索算法来保存和查找Key，前面已经实现了两个方案**

  有序表数据结构+二分搜索算法

  散列表数据结构+散列及冲突解决算法

- **下面我们来试试用二叉搜索树保存key，实现key的快速搜索**

- **复习一下ADT Map的操作：**

  Map(): 创建一个空映射

  put(key, val): 将key-val关联对加入映射中，如果key已经存在，则将val替换原来的旧关联值;

  get(key): 给定key，返回关联的数据值，如不存在，则返回None;

  del: 通过del map[key]的语句形式删除key-val关联;

  len(): 返回映射中key-val关联的数目;

  in: 通过key in map的语句形式，返回key是否存在于关联中，布尔值

二叉搜索树实现

- 二叉搜索树BST的性质是：比父节点小的所有key都出现在左子树，比父节点大的所有key都出现在右子树。
- 右图是一个简单的BST，按照70,31,93,94,14,23,73的顺序插入
- 首先插入的70成为树根

  31比70小，放到左子节点

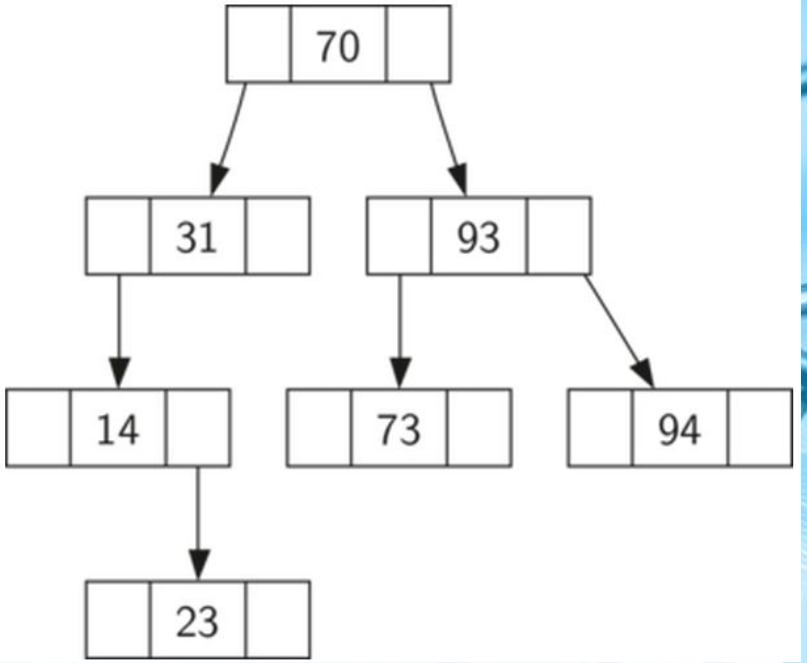
  93比70大，放到右子节点

  94比93大，放到右子节点

  14比31小，放到左子节点

  23比14大，放到其右

  73比93小，放到其左



- 注意：插入顺序不同，生成的BST也不同！

二叉搜索树的实现：节点和链接结构

- 需要用到BST和Node两个类，BST的root成员引用根节点Node
- class BinarySearchTree

  root引用TreeNode对象

  size表示节点总个数

  __iter__（以后再说）

```
class BinarySearchTree:

    def __init__(self):
        self.root = None
        self.size = 0

    def length(self):
        return self.size

    def __len__(self):
        return self.size

    def __iter__(self):
        return self.root.__iter__()
```

```
class TreeNode:
    def __init__(self,key,val,left=None,\
                 right=None,parent=None):
        self.key = key
        self.payload = val
        self.leftChild = left
        self.rightChild = right
        self.parent = parent

    def hasLeftChild(self):
        return self.leftChild

    def hasRightChild(self):
        return self.rightChild

    def isLeftChild(self):
        return self.parent and \
               self.parent.leftChild == self

    def isRightChild(self):
        return self.parent and \
               self.parent.rightChild == self
```

二叉搜索树的实现：TreeNode类

- class TreeNode
  key为键值
  payload是value
  left/rightChild
  另外加了个parent引用

```
def isRoot(self):
    return not self.parent

def isLeaf(self):
    return not (self.rightChild or self.leftChild)

def hasAnyChildren(self):
    return self.rightChild or self.leftChild

def hasBothChildren(self):
    return self.rightChild and self.leftChild

def replaceNodeData(self,key,value,lc,rc):
    self.key = key
    self.payload = value
    self.leftChild = lc
    self.rightChild = rc
    if self.hasLeftChild():
        self.leftChild.parent = self
    if self.hasRightChild():
        self.rightChild.parent = self
```

二叉搜索树的实现：put方法

- **put(key，val)方法：插入key构造BST**

  首先看BST是否为空，如果一个节点都没有，那么key成为根节点root

  否则，就调用一个递归函数_put(key，val，root)来放置key

- **_put(key，val，currentNode)的算法流程**

  如果key比currentNode.key小，那么_put到currentNode左子树

  - 但如果没有左子树，那么key就成为左子节点

  如果key比currentNode.key大，那么_put到currentNode右子树

  - 但如果没有右子树，那么key就成为右子节点

```
def put(self,key,val):
    if self.root:
        self._put(key,val,self.root)
    else:
        self.root = TreeNode(key,val)
    self.size = self.size + 1
```

二叉搜索树的实现：_put辅助方法

- **注意！这个代码没有处理插入重复key的情况**

  其实也就是把val替换一下的事

递归左子树

递归右子树

```
def _put(self,key,val,currentNode):
    if key < currentNode.key:
        if currentNode.hasLeftChild():
            self._put(key,val,currentNode.leftChild)
        else:
            currentNode.leftChild = \
                TreeNode(key,val,parent=currentNode)
    else:
        if currentNode.hasRightChild():
            self._put(key,val,currentNode.rightChild)
        else:
            currentNode.rightChild = \
                TreeNode(key,val,parent=currentNode)
```

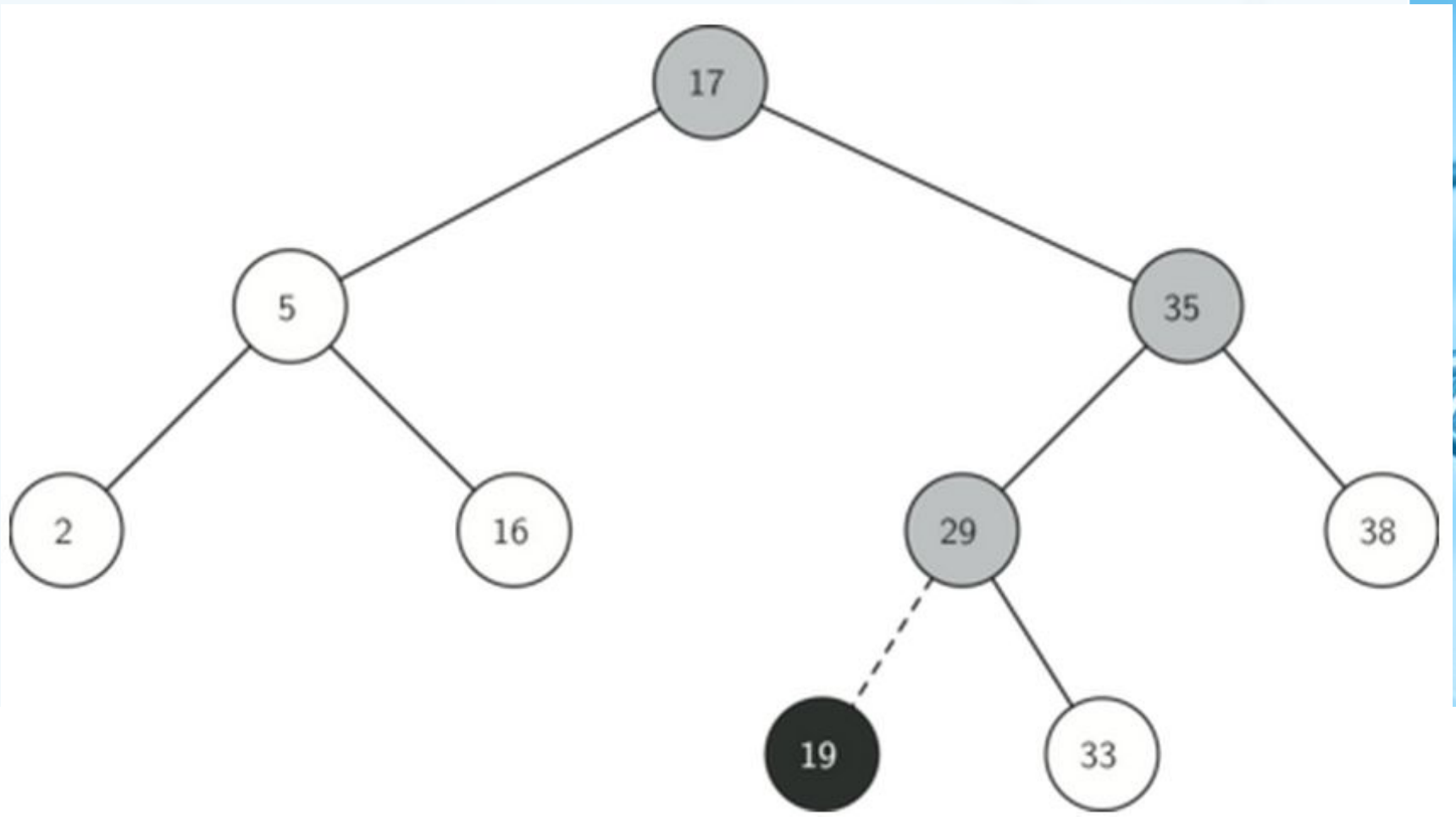
- **随手把__setitem__做了：**

  可以myZipTree['PKU'] = 100871

```
def __setitem__(self,k,v):
    self.put(k,v)
```

二叉搜索树的实现：put图示

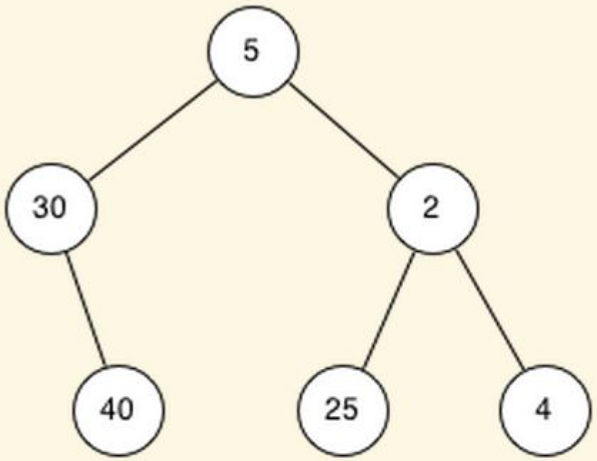
- 插入key=19，currentNode的变化过程（灰色）：



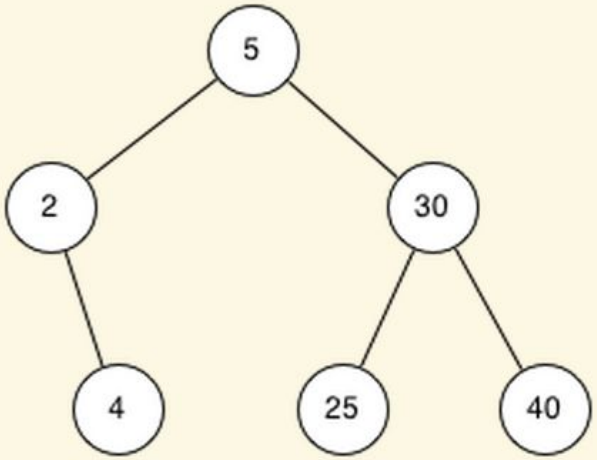
随堂作业6-2

› **按照顺序5，30，2，40，25，4插入key，生成的BST是：**

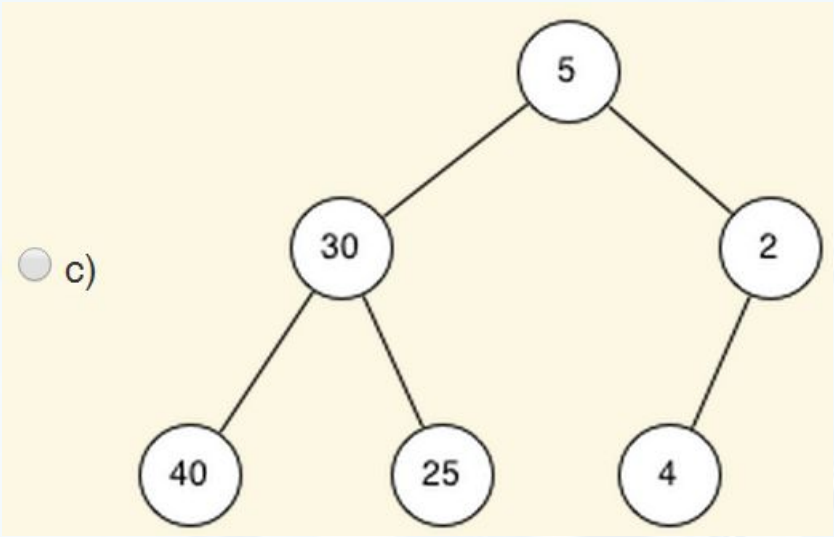
a)



b)



c)



二叉搜索树的实现：get方法

- **一旦BST构建起来，下一个方法就是从树中按照key来取val，即在树中找到key所在的节点**

  从root开始，递归向下，直到找到，或者下到最底层的叶节点也未找到。

- **get方法**

  查看root是否存在？

  调用递归函数_get

- **_get方法**

  空引用返回None

  匹配当前节点，成功

  否则递归进入左/右子树

```
def get(self,key):
    if self.root:
        res = self._get(key,self.root)
        if res:
            return res.payload
        else:
            return None
    else:
        return None

def _get(self,key,currentNode):
    if not currentNode:
        return None
    elif currentNode.key == key:
        return currentNode
    elif key < currentNode.key:
        return self._get(key,currentNode.leftChild)
    else:
        return self._get(key,currentNode.rightChild)
```

二叉搜索树的实现：get方法

- **__getitem__特殊方法**
  实现val= myZipTree['PKU']

- **__contains__特殊方法**
  实现'PKU' in myZipTree的集合判断运算符in

```
def __getitem__(self,key):
    return self.get(key)

def __contains__(self,key):
    if self._get(key,self.root):
        return True
    else:
        return False
```

二叉搜索树的实现：delete方法

- **有增就有减，最复杂的delete方法：**

  首先，看树中有多少节点，超过1个的话，就先用_get找到要删除的节点，然后调用remove来删除，找不到则提示错误；

  如果仅有1个节点（就是只有根节点了），那就看是否匹配根key，能匹配的话就删除根节点，匹配不了则报错。

- **__delitem__特殊方法**

  实现del myZipTree['PKU']这样的语句操作

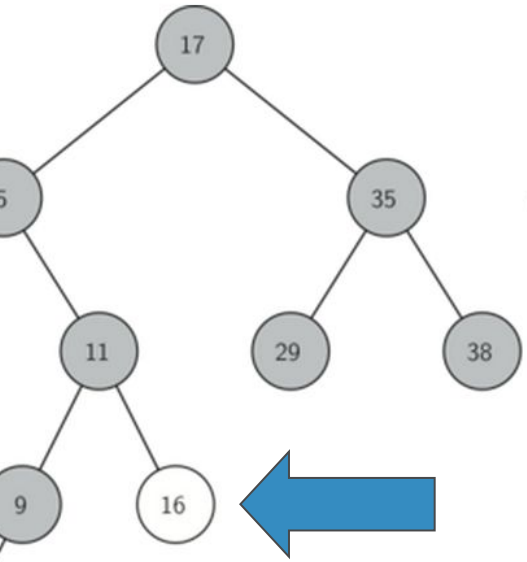
- **复杂在remove方法！**

```
def __delitem__(self,key):
    self.delete(key)
```

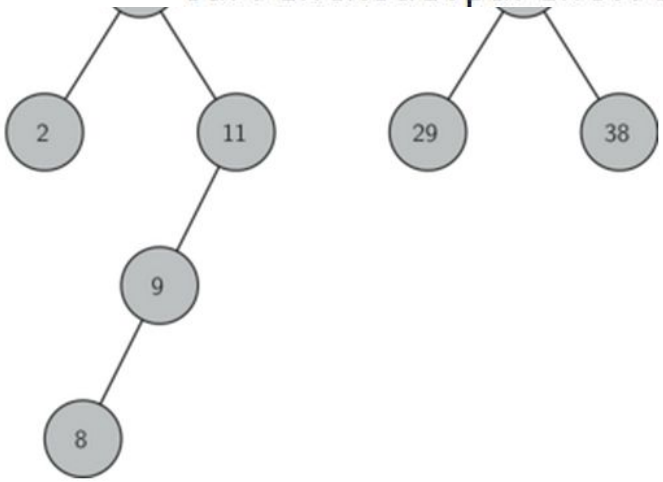
```
def delete(self,key):
  if self.size > 1:
     nodeToRemove = self._get(key,self.root)
     if nodeToRemove:
         self.remove(nodeToRemove)
         self.size = self.size-1
     else:
         raise KeyError('Error, key not in tree')
  elif self.size == 1 and self.root.key == key:
     self.root = None
     self.size = self.size - 1
  else:
     raise KeyError('Error, key not in tree')
```

二叉搜索树的实现：remove方法

- 从BST中remove一个节点，还仍然保持BST的性质，分以下3种情形
  - 节点没有子节点
  - 节点有1个子节点
  - 节点有2个子节点
- 没有子节点的情况好办，直接删除




```
if currentNode.isLeaf(): #leaf
  if currentNode == currentNode.parent.leftChild:
      currentNode.parent.leftChild = None
  else:
      currentNode.parent.rightChild = None
```



二叉搜索树的实现：remove方法

- **第2种情形稍复杂：被删节点有1个子节点**

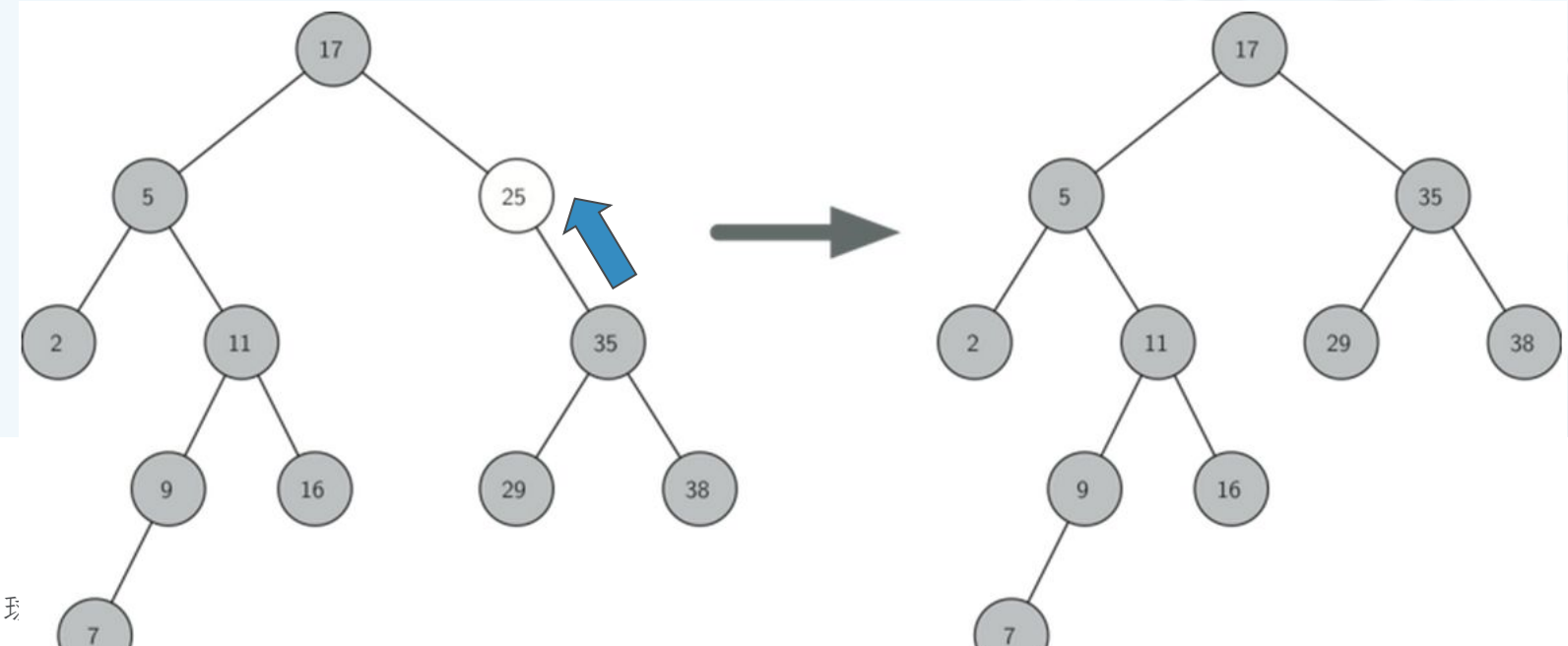
  解决：将这个唯一的子节点上移，替换掉被删节点的位置

- **但替换操作需要区分几种情况：**

  被删节点的子节点是左？还是右子节点？

  被删节点本身是其父节点的左？还是右子节点？

  被删节点本身就是根节点？



```
else: # this node has one child
    if currentNode.hasLeftChild():
        if currentNode.isLeftChild():
```

左子节点删除

```
            currentNode.leftChild.parent = currentNode.parent
            currentNode.parent.leftChild = currentNode.leftChild
        elif currentNode.isRightChild():
```

右子节点删除

```
            currentNode.leftChild.parent = currentNode.parent
            currentNode.parent.rightChild = currentNode.leftChild
        else:
```

根节点删除

```
            currentNode.replaceNodeData(currentNode.leftChild.key,
                                        currentNode.leftChild.payload,
                                        currentNode.leftChild.leftChild,
                                        currentNode.leftChild.rightChild)
    else:
        if currentNode.isLeftChild():
```

左子节点删除

```
            currentNode.rightChild.parent = currentNode.parent
            currentNode.parent.leftChild = currentNode.rightChild
        elif currentNode.isRightChild():
```

右子节点删除

```
            currentNode.rightChild.parent = currentNode.parent
            currentNode.parent.rightChild = currentNode.rightChild
        else:
```

根节点删除

```
            currentNode.replaceNodeData(currentNode.rightChild.key,
                                        currentNode.rightChild.payload,
                                        currentNode.rightChild.leftChild,
                                        currentNode.rightChild.rightChild)
```

二叉搜索树的实现：remove方法

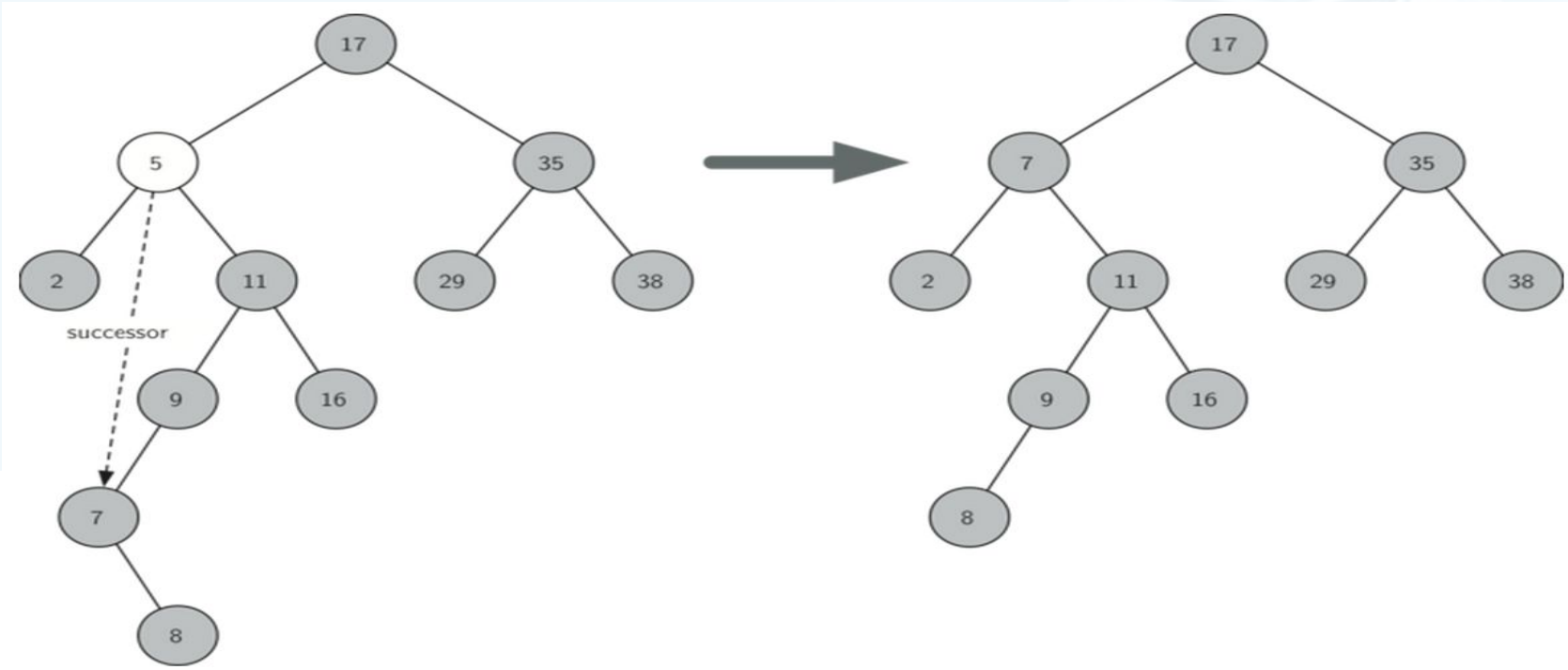
- **第3种情形最为复杂：被删节点有2个子节点**

  这时无法简单地将某个子节点上移替换被删节点

  但可以找到另一个合适的节点来替换被删节点，这个合适节点就是被删节点的下一个key值节点，即被删节点右子树中最小的那个，称为“后继”

  可以肯定这个后继节点最多只有1个子节点（本身是叶节点，或仅有右子树）

  将这个后继节点摘出来（也就是删除了），替换掉被删节点。



二叉搜索树的实现：remove方法

- BinarySearchTree类：remove方法

```
elif currentNode.hasBothChildren(): #interior
  succ = currentNode.findSuccessor()
  succ.spliceOut()
  currentNode.key = succ.key
  currentNode.payload = succ.payload
```

- TreeNode类：寻找后继节点findSuccessor()

  调用找到最小节点findMin()

```
def findSuccessor(self):
  succ = None
  if self.hasRightChild():
      succ = self.rightChild.findMin()
  else:
      if self.parent:
          if self.isLeftChild():
              succ = self.parent
          else:
              self.parent.rightChild = None
              succ = self.parent.findSuccessor()
              self.parent.rightChild = self
  return succ
```

目前不会遇到

```
def findMin(self):
  current = self
  while current.hasLeftChild():
      current = current.leftChild
  return current
```

到左下角

二叉搜索树的实现：remove方法

› TreeNode类：摘出节点spliceOut()

```
def spliceOut(self):
    if self.isLeaf():
        if self.isLeftChild():
            self.parent.leftChild = None
        else:
            self.parent.rightChild = None
    elif self.hasAnyChildren():
        if self.hasLeftChild():
            if self.isLeftChild():
                self.parent.leftChild = self.leftChild
            else:
                self.parent.rightChild = self.leftChild
            self.leftChild.parent = self.parent
        else:
            if self.isLeftChild():
                self.parent.leftChild = self.rightChild
            else:
                self.parent.rightChild = self.rightChild
            self.rightChild.parent = self.parent
```

摘出叶节点

目前不会遇到

摘出带右子节点的节点

二叉搜索树的实现：迭代器

- 作为Python字典，我们可以用for i in dict: 这样的方法枚举字典中的所有key，ADT Map也应该实现这样的迭代器功能
- BinarySearchTree类中的__iter__方法直接调用了TreeNode中的同名特殊方法
- TreeNode类中的__iter__迭代器

  实际上是一个递归函数，想到上节BinaryTree中的__str__递归方法么？

  yield是对每次迭代的返回值。

```
mytree = BinarySearchTree()
mytree[3]="red"
mytree[4]="blue"
mytree[6]="yellow"
mytree[2]="at"

print(3 in mytree)
print(mytree[6])
del mytree[3]
print(mytree[2])
for key in mytree:
    print key, mytree[key]
```

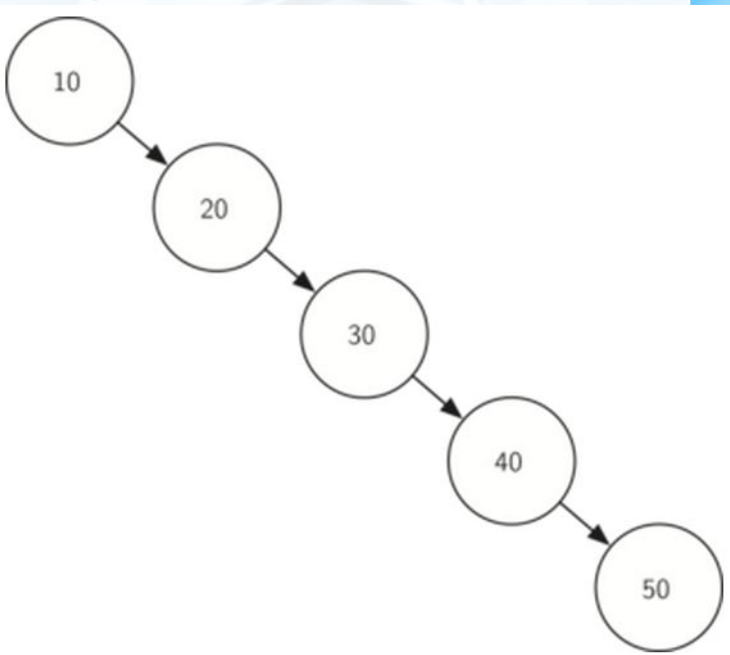
```
def __iter__(self):
    if self:
        if self.hasLeftChild():
            for elem in self.leftChild:
                yield elem
        yield self.key
        if self.hasRightChild():
            for elem in self.rightChild:
                yield elem
```

二叉搜索树：算法分析

- 我们以put方法为例，看看BST类上述实现的时间复杂度
- 其性能决定因素在于二叉搜索树的高度（最大层次），而其高度又受数据项key插入顺序的影响。
- 如果key的列表是随机分布的话，那么大于和小于根节点key的键值大致相等，那么BST的高度就是$\log_2 n$（n是节点的个数），而且，这样的树就是平衡树，put方法最差性能为$O(\log_2 n)$。
- 但key列表分布极端情况就完全不同

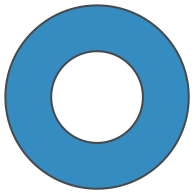
  按照从小到大顺序插入的话，如右图

  这时候put方法的性能为O(n)



- 其它方法也是类似情况
- 如何改进？不受key插入顺序的影响？

课后练习（不需要交）



- 请整理BinarySearchTree类和TreeNode类的全部代码，使之能正确运行

平衡二叉搜索树：AVL树的定义

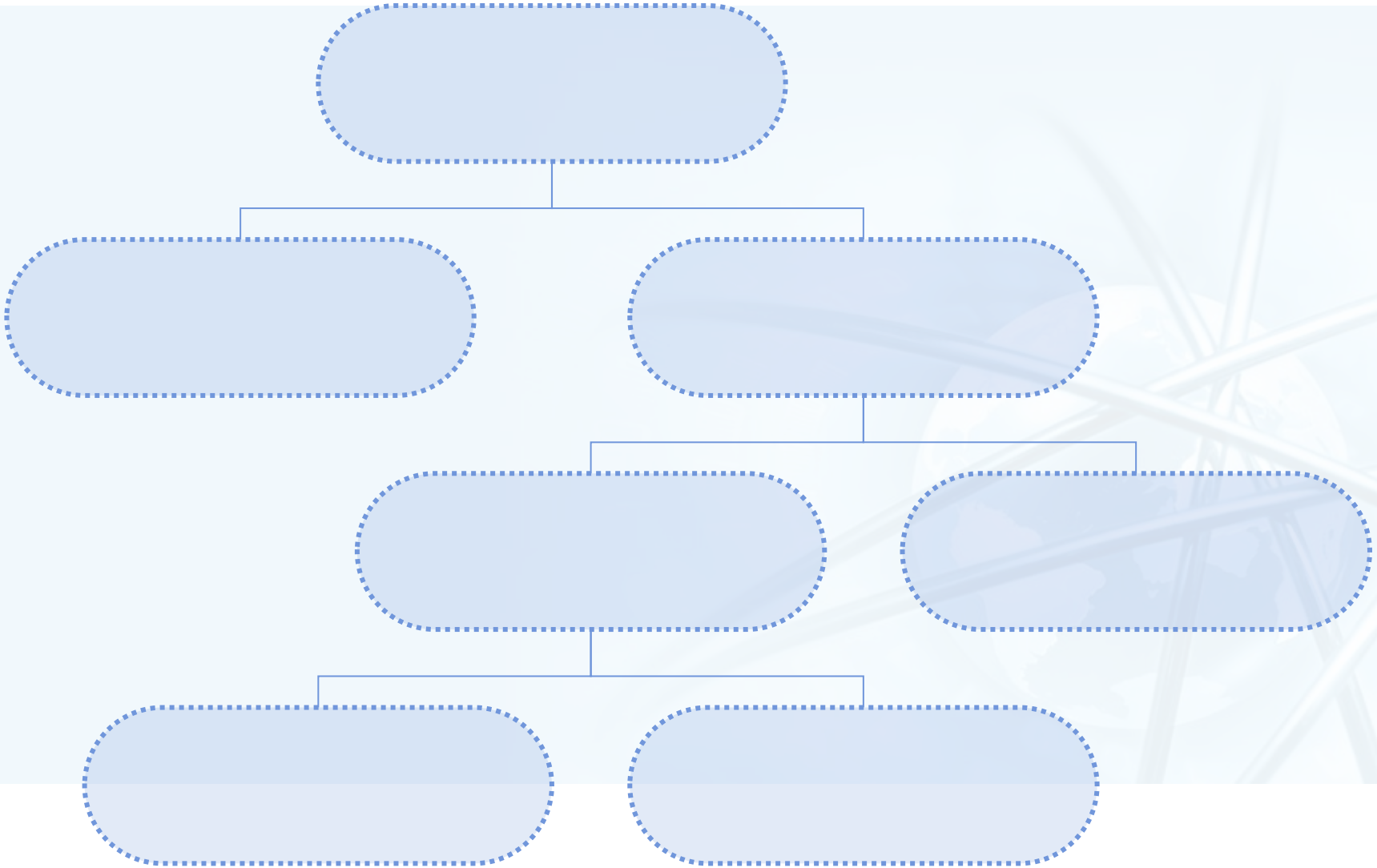
- **我们来看看能够在key插入时一直保持平衡的二叉搜索树：AVL树**
  AVL是发明者的名字缩写：G.M. Adelson-Velskii and E.M. Landis

- **利用AVL树实现ADT Map，基本上与BST的实现相同，不同之处仅在于二叉树的生成与维护过程**

- **AVL树的实现中，需要对每个节点跟踪“平衡因子balance factor”参数，平衡因子是根据节点的左右子树的高度来定义的，确切地说，是左右子树高度差：**
  balanceFactor=height(leftSubTree)−height(rightSubTree)
  如果平衡因子大于0，称为“左重left-heavy”，小于零称为“右重right-heavy”
  平衡因子等于0，则称作平衡。

- **如果一个二叉搜索树中每个节点的平衡因子都在-1，0，1之间，则把这个二叉搜索树称为平衡树**

平衡二叉搜索树：平衡因子



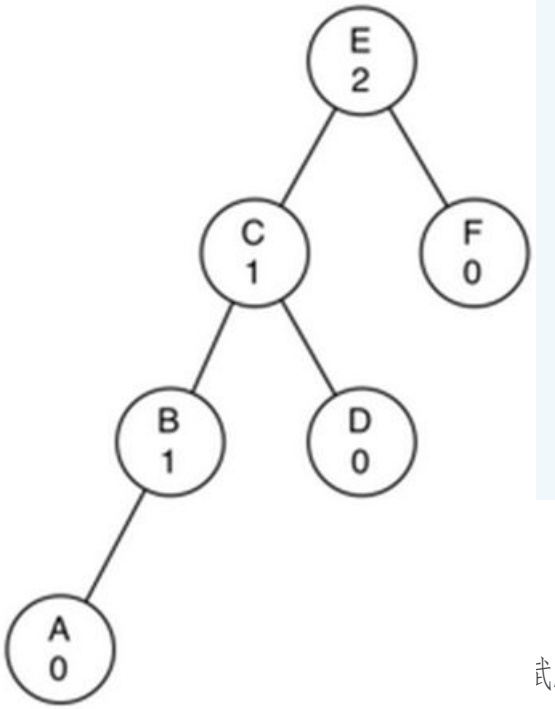
平衡二叉搜索树：AVL树的定义

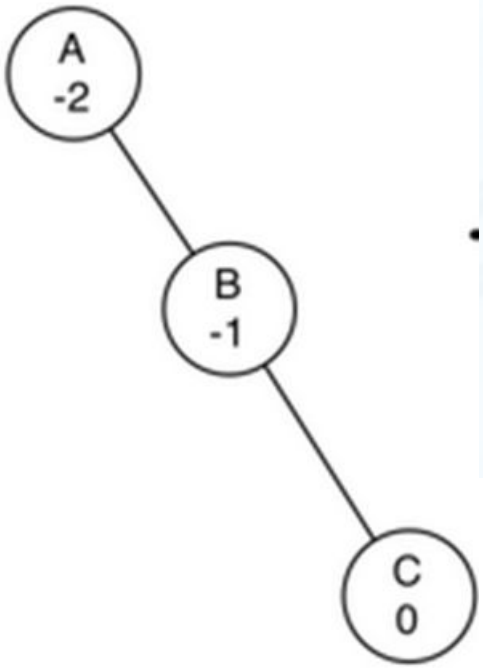
- 一旦在平衡树操作过程中，有节点的平衡因子超出此范围，则需要一个重新平衡的过程

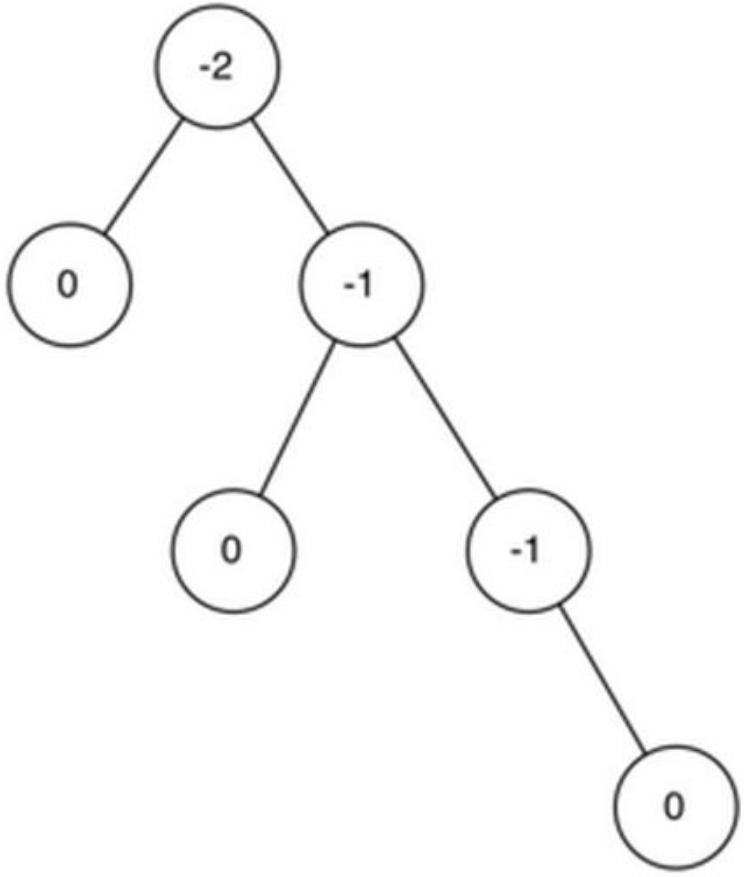
  要保持BST的性质！ 左子树所有节点都小于根，右子树都大于根

- 如右图是一个“右重”的不平衡树

- **思考：如果重新平衡，应该变成什么样？**



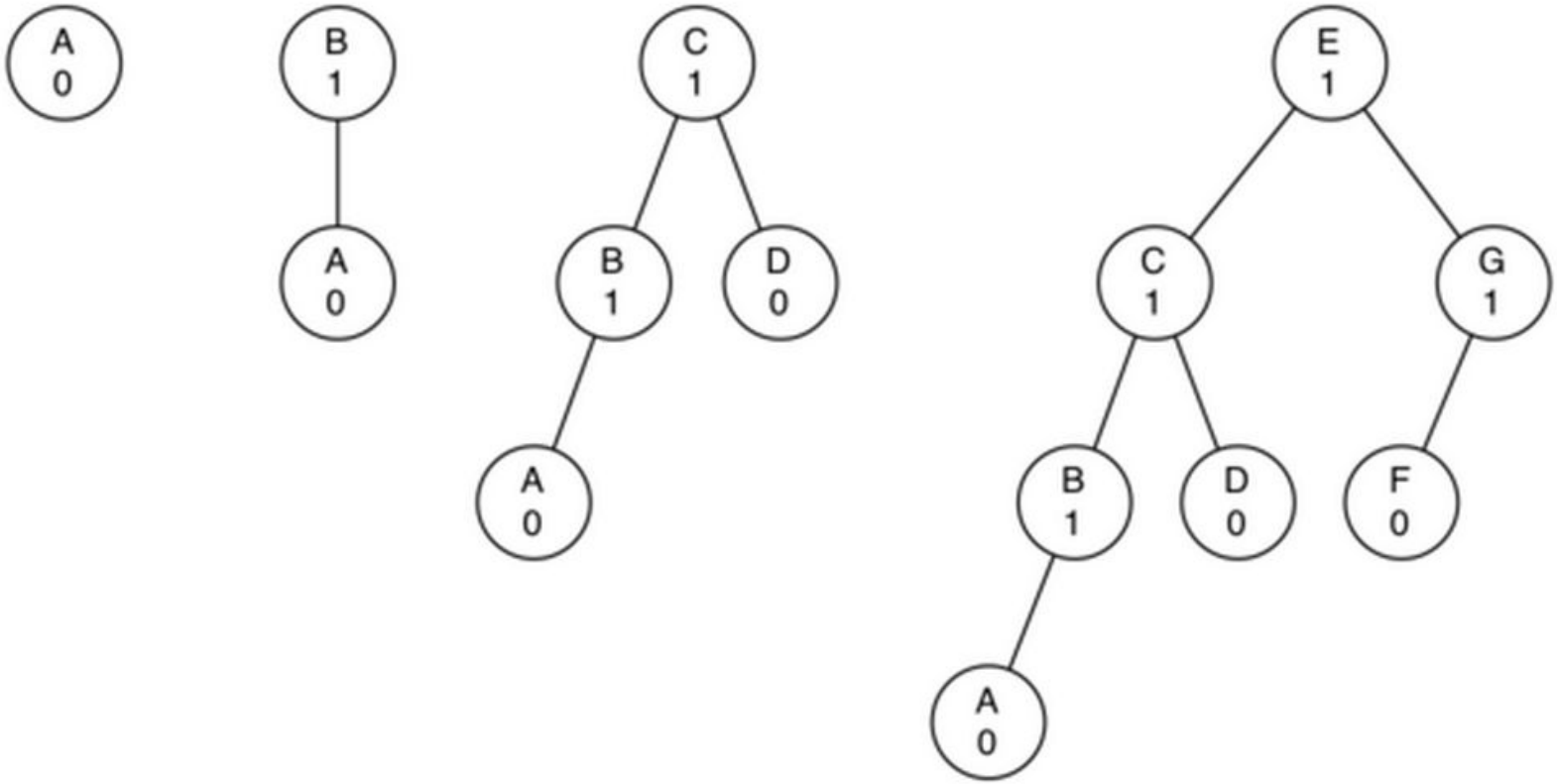




AVL树的性能

- **实现AVL树之前，来看看AVL树是否确实能够达到一个很好的性能**
- **我们来分析AVL树最差情形下的性能：即平衡因子为1或者-1**

下图列出平衡因子为1的“左重”AVL树，树的高度从1开始，来看看问题规模（总节点数N）和比对次数（树的高度h）之间的关系如何？



AVL树性能分析

- **观察上图h=1、2、3、4时，总节点数N的变化：**

  h= 1, N= 1

  h= 2, N= 2= 1+ 1

  h= 3, N= 4= 1+ 1+ 2

  h= 4, N= 7= 1+ 2+ 4

$$N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}$$

- **观察这个通式，很接近斐波那契数列！**

  定义斐波那契数列Fi

  利用Fi重写Nh

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \text{ for all } i \geq 2$$

$$N_h = F_{h+2} - 1, h \geq 1$$

- **斐波那契数列的性质：Fi/Fi-1趋向于黄金分割Φ**

  可以写出Fi的通式

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$F_i = \Phi^i / \sqrt{5}$$

- **将Fi通式代入到Nh中，得到Nh的通式**

$$N_h = \frac{\Phi^{h+2}}{\sqrt{5}} - 1$$

AVL树性能分析

- 上述通式只有N和h了，我们解出h

$$\log N_h + 1 = (H+2)\log\Phi - \frac{1}{2}\log 5$$

$$h = \frac{\log N_h + 1 - 2\log\Phi + \frac{1}{2}\log 5}{\log\Phi}$$

$$h = 1.44\log N_h$$

- 可见，在最差情况下，AVL树在总节点数为N的搜索中，最多需要1.44倍N对数级别的搜索次数
- 可以说AVL树的搜索时间复杂度为O(log n)

AVL树的实现

- **既然AVL平衡树确实能够改进BST树的性能，避免退化情形，我们来看看向AVL树插入一个新key，如何才能保持AVL树的平衡性质**
- **首先，新key必定以叶节点形式插入到AVL树中**

  叶节点的平衡因子是0，其本身无需重新平衡

  但会影响其父节点的平衡因子：

  - 如果作为左子节点插入，则父节点平衡因子会增加1；
  - 如果作为右子节点插入，则父节点平衡因子会减少1。

  这种影响可能随着其父节点到根节点的路径一直传递上去，直到：

  - 传递到根节点为止；
  - 或者某个父节点平衡因子被调整到0，不再影响上层节点的平衡因子为止。
    - （无论从-1或者1调整到0，都不会改变子树高度）
- **将AVL树作为BST树子类实现，TreeNode中增加balanceFactor**

AVL树的实现：put方法

- 重新定义_put方法即可

```
def _put(self,key,val,currentNode):
    if key < currentNode.key:
        if currentNode.hasLeftChild():
            self._put(key,val,currentNode.leftChild)
        else:
            currentNode.leftChild = TreeNode(key,val,parent=currentNode)
            self.updateBalance(currentNode.leftChild)
    else:
        if currentNode.hasRightChild():
            self._put(key,val,currentNode.rightChild)
        else:
            currentNode.rightChild = TreeNode(key,val,parent=currentNode)
            self.updateBalance(currentNode.rightChild)
```

调整因子

调整因子

AVL树的实现：UpdateBalance方法


```
def updateBalance(self,node):
    if node.balanceFactor > 1 or node.balanceFactor < -1:
        self.rebalance(node)
        return
    if node.parent != None:
        if node.isLeftChild():
            node.parent.balanceFactor += 1
        elif node.isRightChild():
            node.parent.balanceFactor -= 1

        if node.parent.balanceFactor != 0:
            self.updateBalance(node.parent)
```

重新平衡

调整父节点因子

AVL树的实现：rebalance重新平衡

- **主要手段：将不平衡的子树进行旋转rotation**

  视“左重”或者“右重”进行不同方向的旋转，同时更新相关父节点引用

  更新旋转后被影响节点的平衡因子

- **如图，是一个“右重”子树A的左旋转（并保持BST性质）**

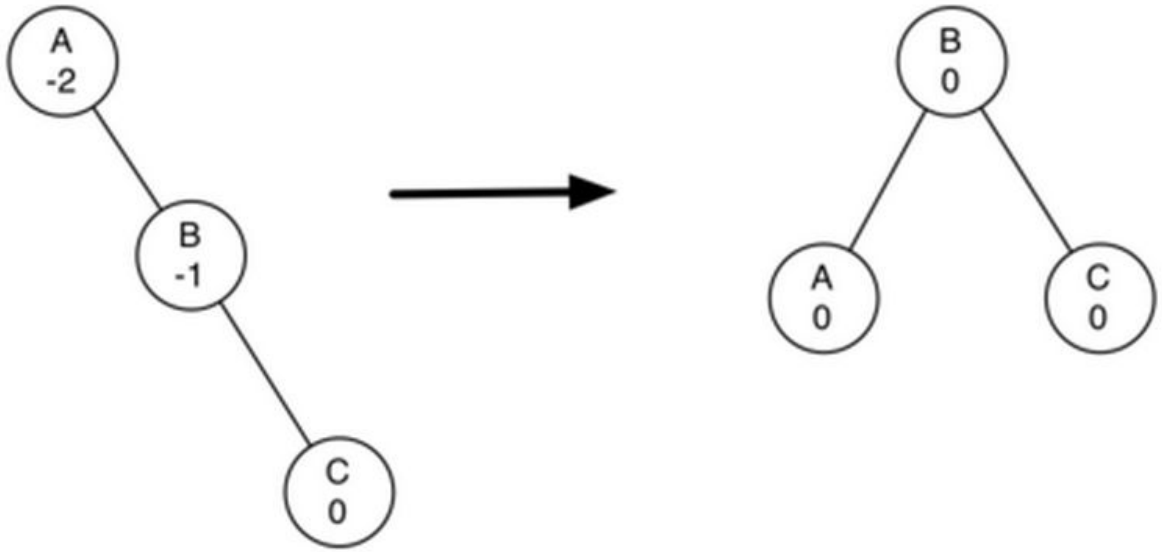
  将右子节点B提升为子树的根

  将旧根节点A作为新根节点B的左子节点

  如果新根节点B原来有左子节点，则将此节点设置为A的右子节点

  （A的右子节点一定有空）

  （为什么？）



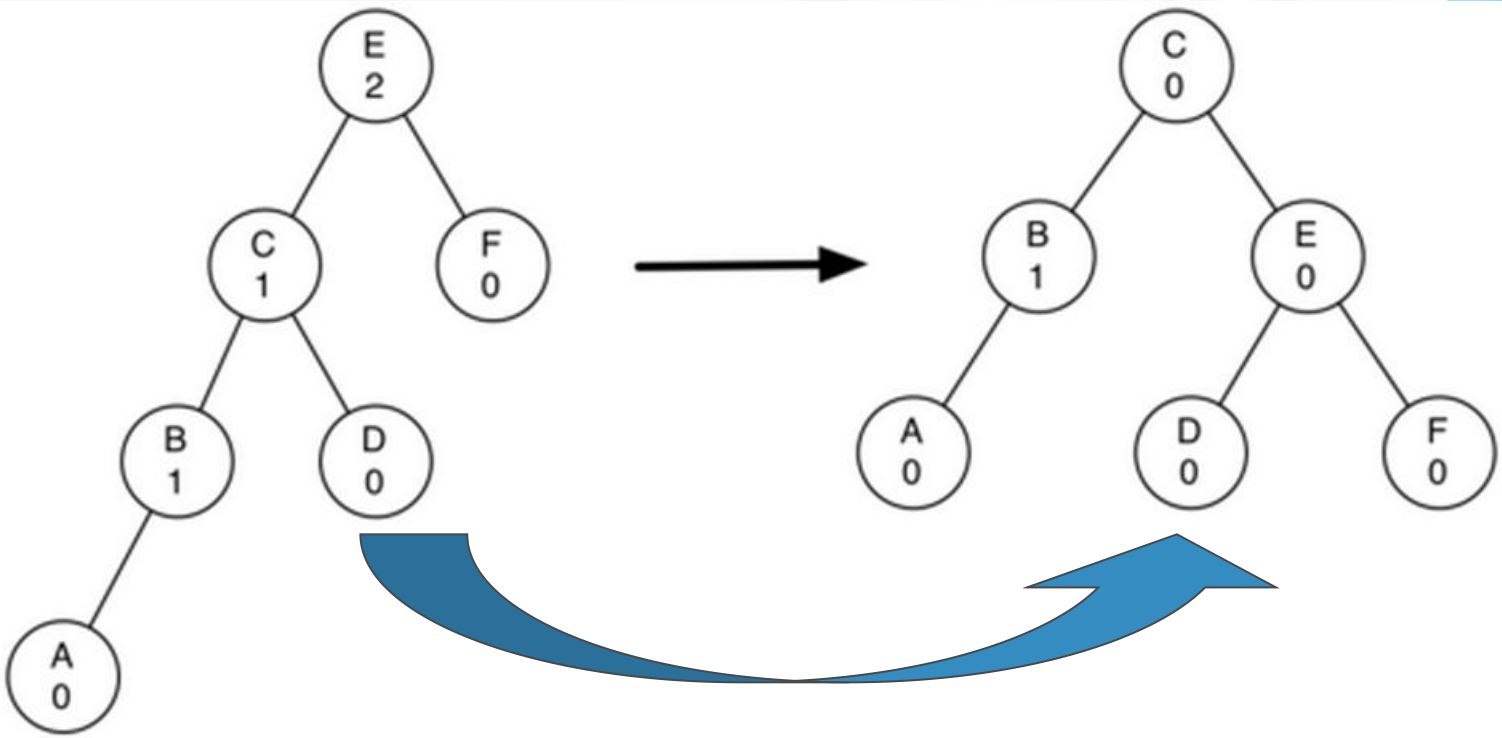
AVL树的实现：rebalance重新平衡

- **更复杂一些的情况：如图的“左重”子树右旋转**

  旋转后，新根节点将旧根节点作为右子节点，但是新根节点原来已有右子节点，需要将原有的右子节点重新定位！

  原有的右子节点D改到旧根节点E的左子节点

  同样，E的左子节点在旋转后一定有空



AVL树的实现：rotateLeft代码

综合两种右重情形

```
def rotateLeft(self,rotRoot):
    newRoot = rotRoot.rightChild
    rotRoot.rightChild = newRoot.leftChild
    if newRoot.leftChild != None:
        newRoot.leftChild.parent = rotRoot
    newRoot.parent = rotRoot.parent
    if rotRoot.isRoot():
        self.root = newRoot
    else:
        if rotRoot.isLeftChild():
            rotRoot.parent.leftChild = newRoot
        else:
            rotRoot.parent.rightChild = newRoot
    newRoot.leftChild = rotRoot
    rotRoot.parent = newRoot
    rotRoot.balanceFactor = rotRoot.balanceFactor + \
                            1 - min(newRoot.balanceFactor, 0)
    newRoot.balanceFactor = newRoot.balanceFactor + \
                            1 + max(rotRoot.balanceFactor, 0)
```

仅有两个节点需要调整因子

AVL树的实现：如何调整平衡因子

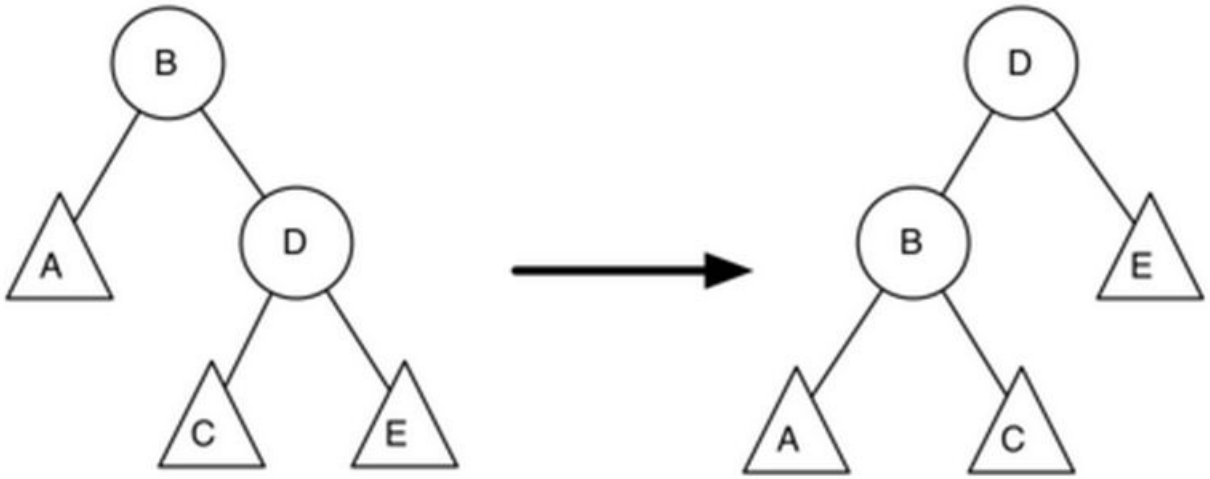
- **看看左旋转对平衡因子的影响**

保持了次序ABCDE

ACE的平衡因子不变

- hA/hC/hE不变

主要看BD新旧关系



- **我们来看看B的变化**

新B= hA- hC

旧B= hA- 旧hD

而：旧hD= 1+ max(hC, hE)，所以旧B= hA- (1+ max(hC, hE))

新B- 旧B= 1+ max(hC, hE)- hC

新B= 旧B+ 1+ max(hC, hE)- hC；把hC移进max函数里就有

新B= 旧B+ 1+ max(0, -旧D) <==> 新B= 旧B+ 1- min(0, 旧D)

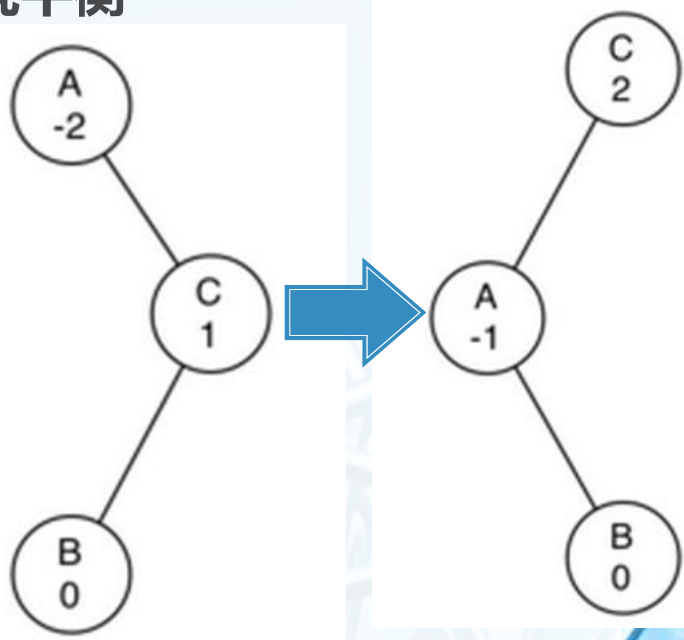
```
rotRoot.balanceFactor = rotRoot.balanceFactor + \
                        1 - min(newRoot.balanceFactor, 0)
```

AVL树的实现：更复杂的情形

- **下图的“右重”子树，单纯的左旋转无法实现平衡**

  左旋转后变成“左重”了

  “左重”再右旋转，还回到“右重”



- **所以，在左旋转之前检查右子节点的因子**

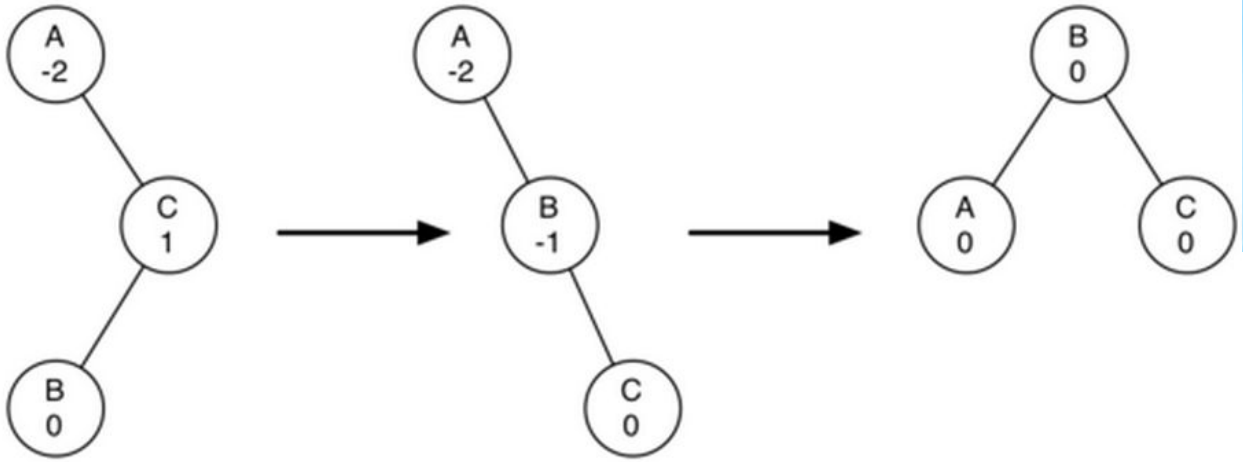
  如果右子节点“左重”的话，先对它进行右旋转

  再实施原来的左旋转

- **同样，在右旋转之前检查左子节点的因子**

  如果左子节点“右重”的话，先对它进行左旋转

  再实施原来的右旋转



AVL树的实现：rebalance代码

右重需要左旋

右子节点左重先右旋

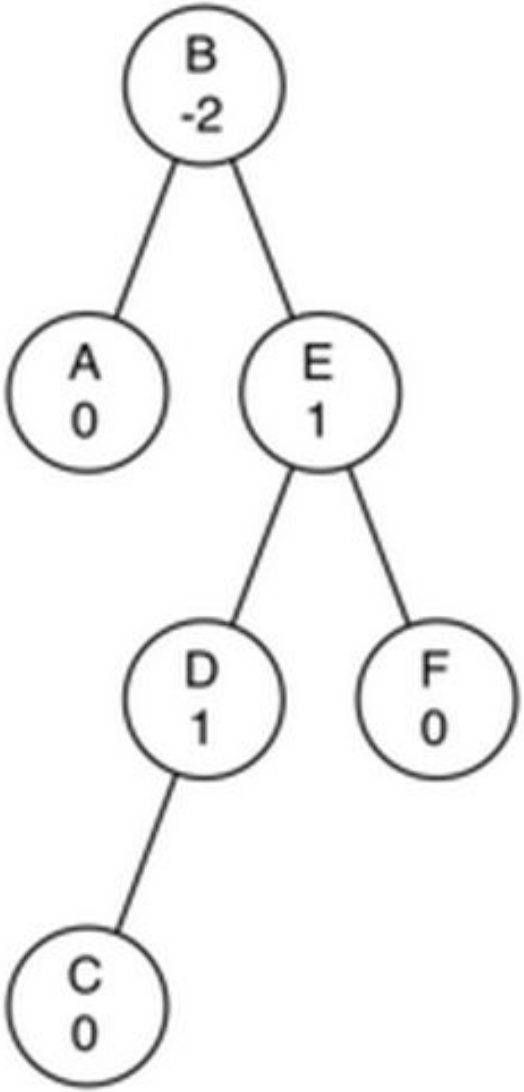
左重需要右旋

左子节点右重先左旋

```
def rebalance(self,node):
    if node.balanceFactor < 0:
        if node.rightChild.balanceFactor > 0:
            # Do an LR Rotation
            self.rotateRight(node.rightChild)
            self.rotateLeft(node)
        else:
            # single left
            self.rotateLeft(node)
    elif node.balanceFactor > 0:
        if node.leftChild.balanceFactor < 0:
            # Do an RL Rotation
            self.rotateLeft(node.leftChild)
            self.rotateRight(node)
        else:
            # single right
            self.rotateRight(node)
```

AVL树的实现：操练一下

- 如图所示的“右重”子树如何平衡？
- 请图示旋转过程



AVL树的实现：结语

- **经过复杂的put方法，AVL树始终维持平衡性质，这样get方法也始终保持O(log n)的高性能**

  不过，put方法的代价有多大？

- **将AVL树的put方法分为两个部分：**

  需要插入的新节点是叶节点，更新其所有父节点和祖先节点的代价最多为O(log n)

  如果插入的新节点引发了不平衡，重新平衡最多需要2次旋转，但旋转的代价与问题规模无关，是常数O(1)

  所以整个put方法的时间复杂度还是O(log n)

- **课后练习：从AVL树删除一个节点，如何保持平衡？**

ADT Map的实现方法小结

- 我们采用了多种数据结构和算法来实现ADT Map，其时间复杂度数量级如下表所示：

operation	Sorted List	Hash Table	Binary Search Tree	AVL Tree
put	O(n)	O(1) -> O(n)	O(log2n) -> O(n)	O(log2n)
get	O(log2n)	O(1) -> O(n)	O(log2n) -> O(n)	O(log2n)
in	O(log2n)	O(1) -> O(n)	O(log2n) -> O(n)	O(log2n)
del	O(n))	O(1) -> O(n)	O(log2n) -> O(n)	O(log2n)

本章总结

- 本章介绍了“树”数据结构，我们讨论了如下算法
- 用于表达式解析和求值的二叉树
- 用于实现ADT Map的二叉搜索树BST树
- 改进了性能，用于实现ADT Map的平衡二叉搜索树AVL树
- 实现了“最小堆”的完全二叉树：二叉堆