数据结构与算法（Python）-07/图及算法

陈斌 gischen@pku.edu.cn 北京大学地球与空间科学学院

目录

- 本章目标
- 图抽象数据类型及实现
- Word Ladder词梯问题
- 骑士周游问题
- 拓扑排序和强连通分支
- 最短路径问题
- Prim最小生成树算法

本章目标

- 理解图的概念及使用
- 通过多种方法实现图抽象数据类型
- 图应用于解决不同领域的问题

图Graph的概念

- 就像“羊”在英文中并不是一个单独的词
- 中文的“图画”在英文中有很多对应的单词，其意义大不相同

painting：用画刷画的油画

drawing：用硬笔画的素描/线条画

picture：真实形象所反映的画，如照片等，如take picture

image：由印象而来的画，遥感影像叫做image，因是经过传感器印象而来

graph：重在由一些基本元素构造而来的图，如点、线段等

figure：轮廓图的意思，某个侧面的轮廓，所以有figure out的说法

diagram：抽象的概念关系图，如电路图、海洋环流图、类层次图

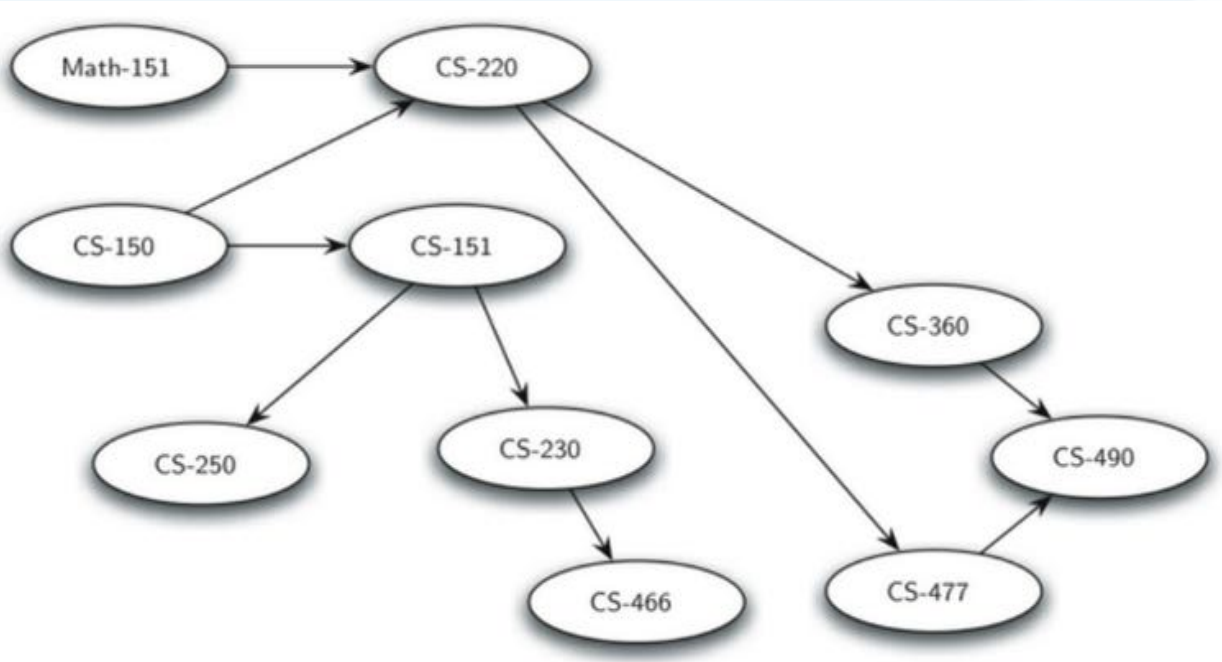
chart：由数字统计得来的柱状图、饼图、折线图

map：地图；plot：地图上的一小块

图Graph的概念

- **图Graph是比树更为一般的结构，也是由节点和边构成**
  实际上树是一种具有特殊性质的图

- **图可以用来表示现实世界中很多事物**
  道路交通系统、航班线路、互联网连接、或者是大学中课程的先修次序



图Graph的概念

- **一旦我们对图相关问题进行了准确的描述，就可以采用处理图的标准算法来解决那些看起来很艰深的问题**

  对于人来说，人脑的识别模式能够轻而易举地判断地图中不同地点的相互关联，但计算机并没有这样的能力；

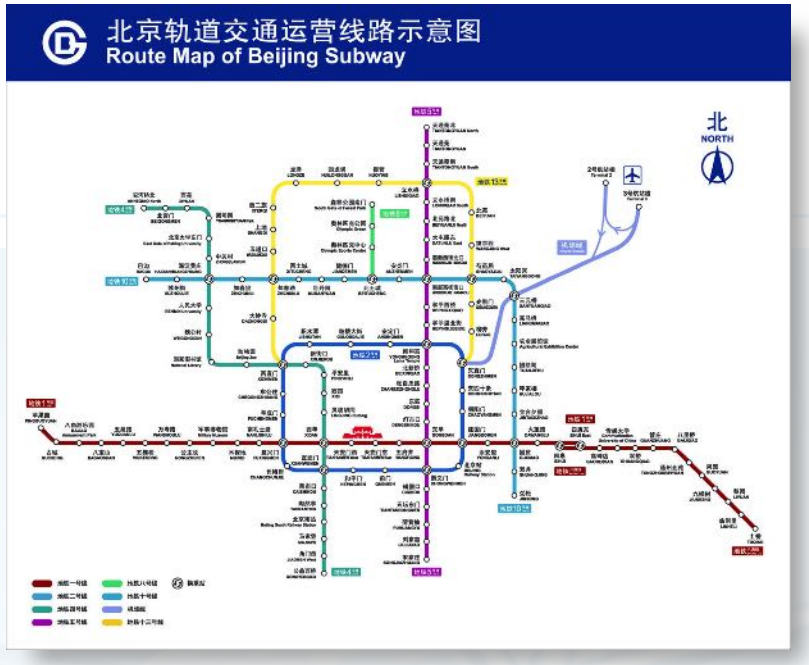
  但如果用图来表示地图，就可以解决很多对地图很熟悉甚至专业的人才能解决的问题，甚至能超越；

  互联网是由成千上万的计算机所连接起来的复杂网络，也可以通过图算法来确定计算机之间达成通讯的最短、最快或者最有效的路径。

  大学课程之间的先修依赖关系，也适合用图来表示

北京公共交通

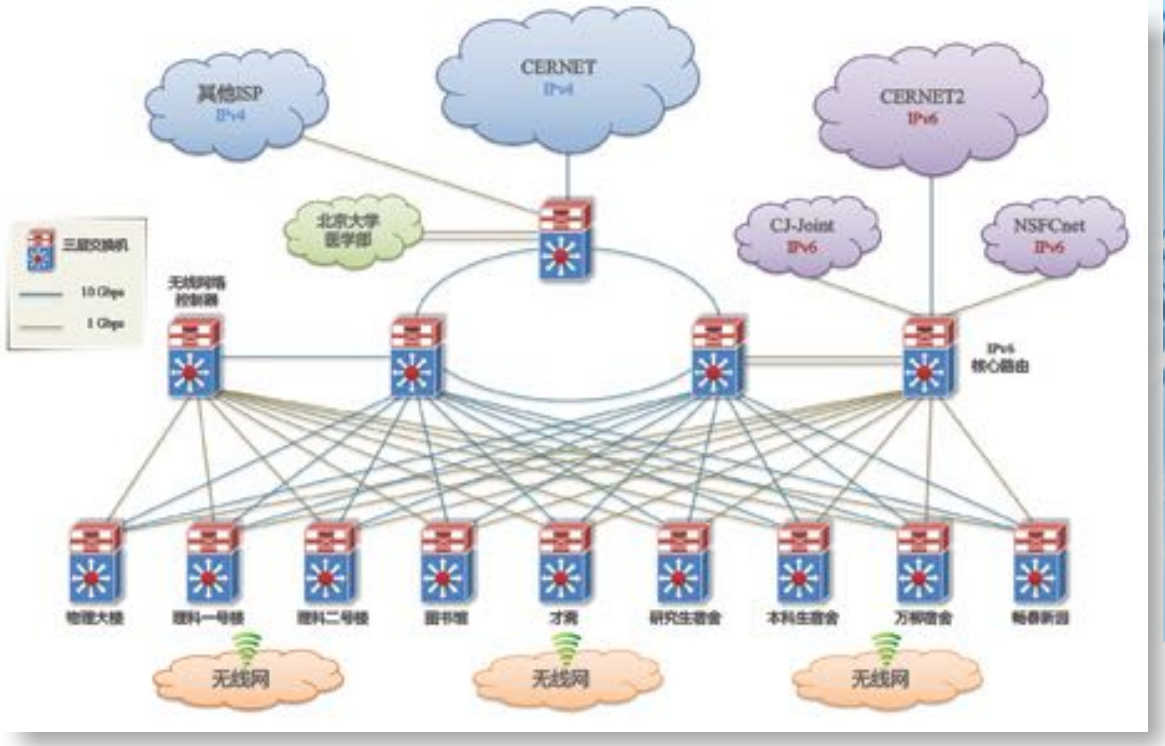
- 北京地铁共有18条运营线路，不重复计算换乘车站则为268座车站，总长约527千米。
- 北京公交系统有1020条运营线路，公交站点近2000个。



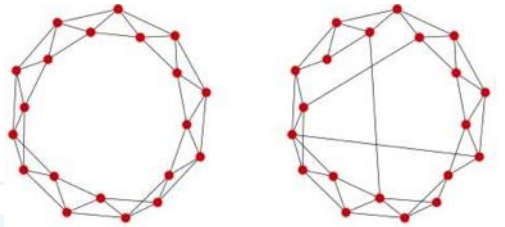
互联网

- **北京大学校园网目前已经具有近10万信息点**
  通过层层的交换机、路由器连接在一起，路由器之间又相互连接
- **互联网中ipv4的近40亿地址已接近枯竭**
  一张几十亿个信息点的巨型网络
- **提供内容的Web站点已突破10亿个**
  由超链接相互连接的网页更是不计其数

  Google每天处理的数据量约10PB
- **在天文数字规模的网络面前**
- **人脑已经无法处理**



社交网络：六度分隔理论



- **世界上任何两个人之间通过最多6个人即可建立联系**

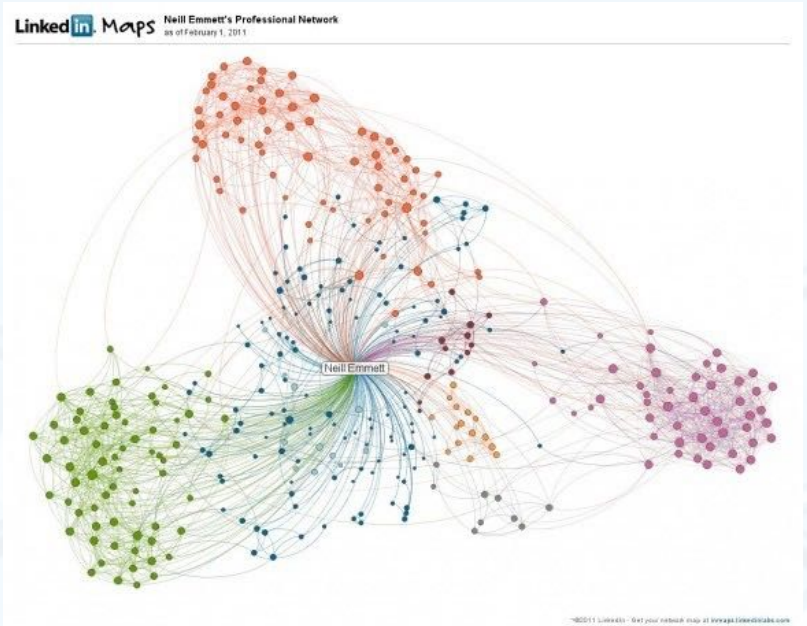
  互联网社交网络的兴起将每个人联系到一起

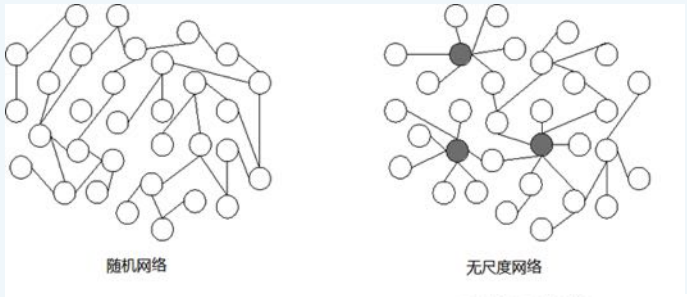
- **在社会中有20%擅长交往的人，建立了80%的连接**

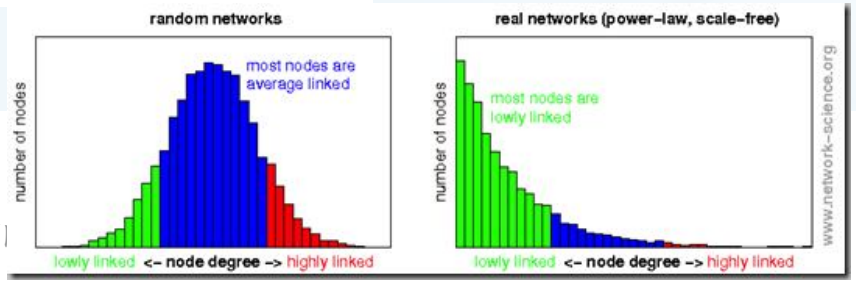
  区别于随机网络，保证了六度分隔的成立

  引出了无尺度网络的研究

  现实中的复杂网络多属于无尺度网络







术语表

- **顶点Vertex**

  也称“节点Node”，是图的基本组成部分，顶点具有名称标识Key，也可以携带数据项payload。

- **边Edge**

  也称“弧Arc”，是图的另一个基本组成部分，作为2个顶点之间关系的表示，边连接两个顶点；边可以是单向one-way或者双向two-way的，如果一个图中的所有边都是单向的，就称这个图为“有向图directed graph/digraph”。

- **权重Weight**

  为了表达从一个顶点到另一个顶点的“代价”，可以给边赋权；例如公交网络中两个站点之间的“距离”、“通行时间”和“票价”都可以作为权重。

图的定义

- **一个图G可以定义为G=(V, E)**

  其中V是顶点的集合

  E是边的集合，E中的每条边e=(v，w)，v和w都是V中的顶点；

  如果是赋权图，则可以在e中添加第三个权重分量

  子图subgraph：V和E的子集

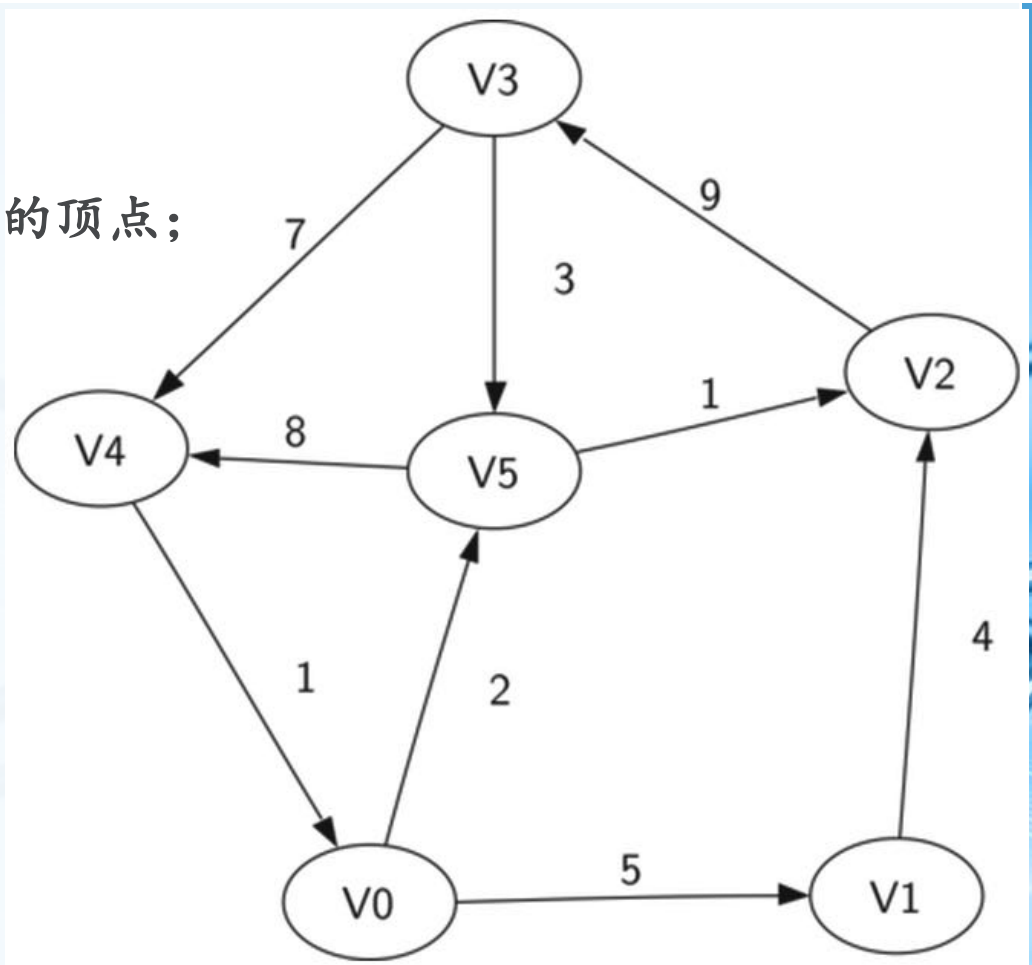
- **赋权图的例子：6个顶点及9条边**

  有向图

  权重为整数

$$V = \{V0, V1, V2, V3, V4, V5\}$$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (v0, v1, 5), (v1, v2, 4), (v2, v3, 9), (v3, v4, 7), (v4, v0, 1), \\ (v0, v5, 2), (v5, v4, 8), (v3, v5, 3), (v5, v2, 1) \end{array} \right\}$$



术语表

路径Path

图中的路径，是由边依次连接起来的顶点序列；

P=(w1，w2，…，wn)，其中对于所有1<=i<=n-1，(wi，wi+1)属于E；

无权路径的长度为边的数量，等于n-1；带权路径的长度为所有边权重的和；

如，前页中的一条路径(v3,v4,v0,v1)，其边为{(v3,v4,7),(v4,v0,1),(v0,v1,5)}

圈Cycle

圈是首尾顶点相同的路径，如前页中(v5,v2,v3,v5)是一个圈

如果一个图中不存在任何圈，则称作“无圈图acyclic graph”

无圈的有向图称作“有向无圈图directed acyclic graph：DAG”

后面我们可以看到如果一个问题能表示成DAG，就可以用图算法很好地解决

思考：树是一种什么性质的图？是DAG么？

抽象数据类型：ADT Graph

抽象数据类型ADT Graph定义如下：

Graph()：创建一个空的图；

addVertex(vert)：将一个顶点Vertex对象加入图中

addEdge(fromVert, toVert)：添加一条有向边

addEdge(fromVert, toVert, weight)：添加一条带权的有向边

getVertex(vertKey)：查找名称为vertKey的顶点

getVertices()：返回图中所有顶点列表

in：按照vert in graph的语句形式，返回顶点是否存在图中True/False

ADT Graph的实现方法有两种主要形式：

邻接矩阵adjacency matrix和邻接表adjacency list

两种方法各有优劣，需要在不同的应用中加以选择

邻接矩阵Adjacency Matrix

- 对图的最直观实现方法是采用二维矩阵
- 矩阵的每行和每列都代表图中的顶点，如果两个顶点之间有边相连，则在相应行列值的矩阵分量中加以体现
  - 无权边则将矩阵分量标注为1，或者0
  - 带权边则将权重保存为矩阵分量值
- 邻接矩阵实现法的优点是简单
  - 可以很容易得到顶点是如何相连
- 但如果图中的边数很少则效率低下
  - 成为“稀疏sparse”矩阵
  - 大多数问题所对应的图都是稀疏的
  - 边远远少于|V|^2这个量级

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
V0		5				2
V1			4			
V2				9		
V3					7	3
V4	1					
V5			1		8	

邻接列表Adjacency List

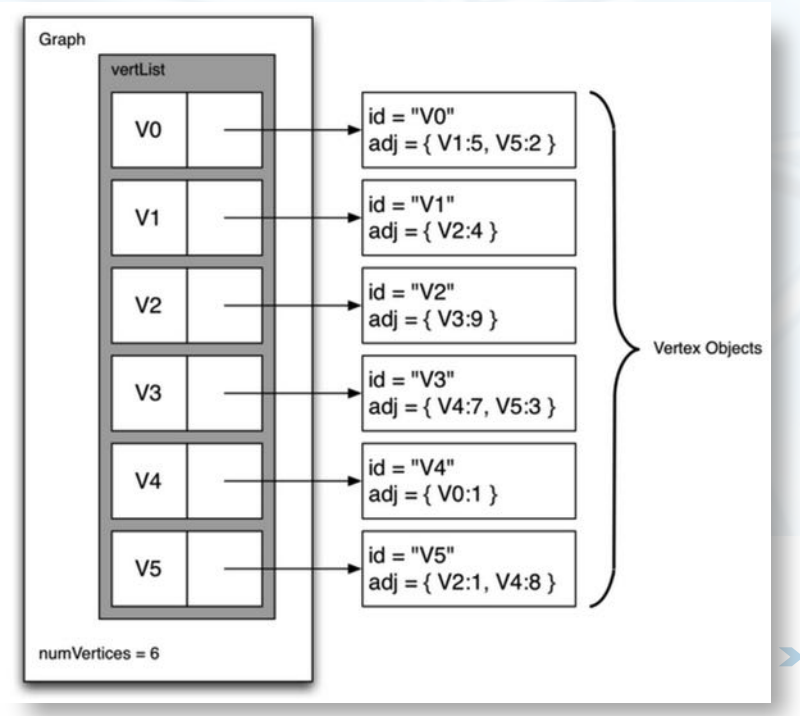
- **邻接列表adjacency list可以成为稀疏图的更高效实现方案**

  维护一个包含所有顶点的主列表（master list）

  主列表中的每个顶点，再关联一个与自身有边连接的所有顶点的列表

  - 在Python实现的Vertex类中，可以采用字典来保存顶点列表
  - 字典中的key对应顶点标识，而value则可以保存顶点连接边的权重

- **邻接列表法的存储空间紧凑高效**
- **很容易获得顶点所连接的所有顶点**
- **以及连接边的信息**



ADT Graph的实现

包括两个类Vertex和Graph

Graph保存了包含所有顶点的主表master list

Vertex则包含了顶点信息，以及顶点连接边的信息

nbr是顶点对象的key

```
class Vertex:
    def __init__(self,key):
        self.id = key
        self.connectedTo = {}

    def addNeighbor(self,nbr,weight=0):
        self.connectedTo[nbr] = weight

    def __str__(self):
        return str(self.id) + ' connectedTo: ' \
               + str([x.id for x in self.connectedTo])

    def getConnections(self):
        return self.connectedTo.keys()

    def getId(self):
        return self.id

    def getWeight(self,nbr):
        return self.connectedTo[nbr]
```

ADT Graph的实现

新加顶点

通过key查找顶点

```
class Graph:
    def __init__(self):
        self.vertList = {}
        self.numVertices = 0

    def addVertex(self,key):
        self.numVertices = self.numVertices + 1
        newVertex = Vertex(key)
        self.vertList[key] = newVertex
        return newVertex

    def getVertex(self,n):
        if n in self.vertList:
            return self.vertList[n]
        else:
            return None

    def __contains__(self,n):
        return n in self.vertList
```

ADT Graph的实现

不存在的顶点先添加

调用起始顶点的方法
添加邻接边

```
def __contains__(self,n):
    return n in self.vertList

def addEdge(self,f,t,cost=0):
    if f not in self.vertList:
        nv = self.addVertex(f)
    if t not in self.vertList:
        nv = self.addVertex(t)
    self.vertList[f].addNeighbor(self.vertList[t], cost)

def getVertices(self):
    return self.vertList.keys()

def __iter__(self):
    return iter(self.vertList.values())
```

ADT Graph的实现：实例

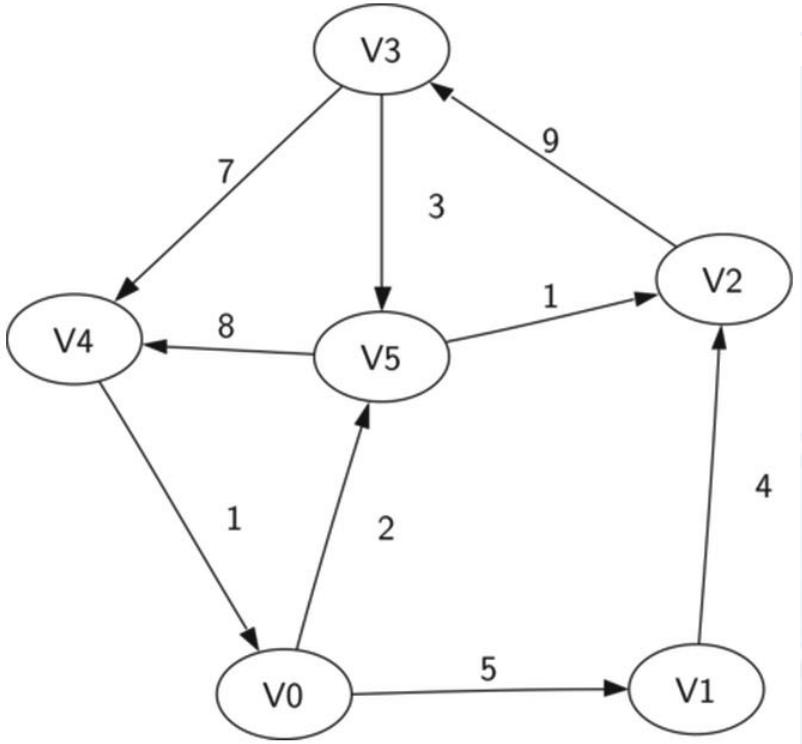

```
>>> g= Graph()
>>> for i in range(6):
        g.addVertex(i)


0 connectedTo: []
1 connectedTo: []
2 connectedTo: []
3 connectedTo: []
4 connectedTo: []
5 connectedTo: []
>>> print g.vertList
{0: 0 connectedTo: [], 1: 1 connectedTo: [], 2: 2 connectedTo: [], 3: 3 connecte
dTo: [], 4: 4 connectedTo: [], 5: 5 connectedTo: []}
```

ADT Graph的实现：实例


```
>>> g.addEdge(0,1,5)
>>> g.addEdge(0,5,2)
>>> g.addEdge(1,2,4)
>>> g.addEdge(2,3,9)
>>> g.addEdge(3,4,7)
>>> g.addEdge(3,5,3)
>>> g.addEdge(4,0,1)
>>> g.addEdge(5,4,8)
>>> g.addEdge(5,2,1)
>>> for v in g:
        for w in v.getConnections():
                print "(%s, %s)" % (v.getId(), w.getId())


(0, 5)
(0, 1)
(1, 2)
(2, 3)
(3, 4)
(3, 5)
(4, 0)
(5, 4)
(5, 2)
>>>
```



词梯Word Ladder问题

- 由“爱丽丝漫游奇境”的作者Lewis Carroll在1878年所发明的单词游戏
- 从一个单词演变到另一个单词，其中的过程可以经过多个中间单词

  要求是相邻两个单词之间差异只能是1个字母，如FOOL变SAGE：

  FOOL >> POOL >> POLL >> POLE >> PALE >> SALE >> SAGE
- 我们的目标是找到**最短**的单词变换序列
- 采用图来解决这个问题的步骤如下：

  将可能的单词之间的演变关系表达为图

  采用“广度优先搜索 BFS”来找到从开始单词到结束单词之间的有效路径

词梯问题：构建单词关系图

- **首先是如何将大量的单词集放到图中**

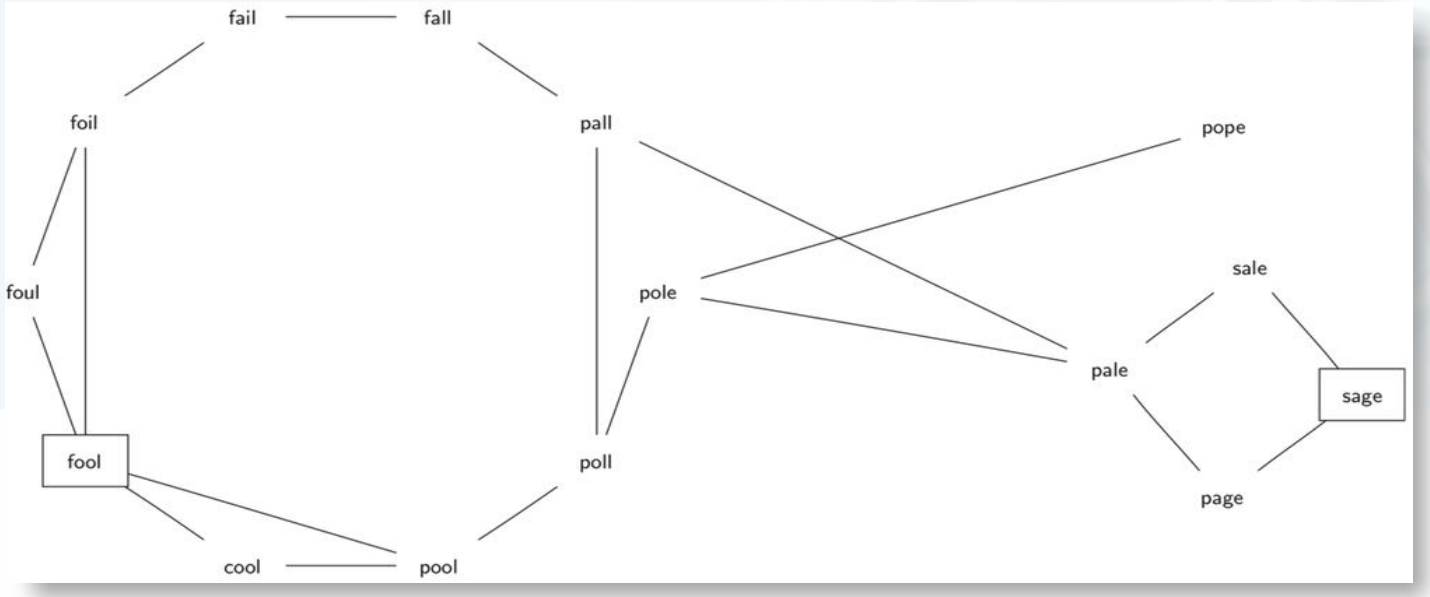
  将单词作为顶点的标识Key

  如果两个单词之间仅相差1个字母，就在它们之间设一条边

  这样，在两个单词之间的任意一条路径，就是词梯问题的一个解

- **下图是从FOOL到SAGE的词梯解，所用的图是无向图，边没有权重**

  FOOL到SAGE的每条路径都是一个解

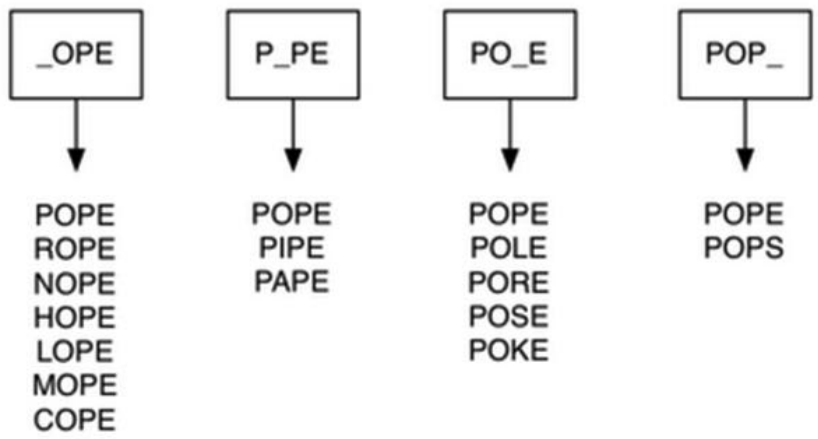


词梯问题：构建单词关系图

- **单词关系图可以通过不同的算法来构建（以4个字母的单词表为例）**
  首先是将所有单词作为顶点加入图中，再设法建立顶点之间的边

- **建立边的最直接算法，是对每个顶点（单词），与其它所有单词进行比较，如果相差仅1个字母，则建立一条边**
  时间复杂度是O(n^2)，对于所有4个字母的5110个单词，需要超过2600万次比较

- **改进的算法是创建大量的桶，每个桶可以存放若干单词，桶的标记是去掉1个字母，以通配符“_”占空的单词，所有匹配标记的单词都放到这个桶里，所有单词就位后，再在同一个桶的单词之间建立边即可。**



词梯问题：构建单词关系图

- 可以采用Python字典来建立桶

4字母单词可以属于4个桶

同一个桶的单词之间建立边

```
def buildGraph(wordFile):
    d = {}
    g = Graph()
    wfile = open(wordFile,'r')
    # create buckets of words that differ by one letter
    for line in wfile:
        word = line[:-1]
        for i in range(len(word)):
            bucket = word[:i] + '_' + word[i+1:]
            if bucket in d:
                d[bucket].append(word)
            else:
                d[bucket] = [word]
    # add vertices and edges for words in the same bucket
    for bucket in d.keys():
        for word1 in d[bucket]:
            for word2 in d[bucket]:
                if word1 != word2:
                    g.addEdge(word1,word2)
    return g
```

词梯问题：构建单词关系图

- **样例数据文件包含了5,110个4字母的单词**
  可从课程网站下载
- **如果采用邻接矩阵表示这个单词关系图，则需要2,600万个矩阵单元**
  5,110*5,110= 26,112,100
  而单词关系图总计有53,286条边，仅仅达到矩阵单元数量的0.2%
- **单词关系图是一个非常稀疏的图**
- **猜想与验证：这个单词关系图会是一个随机网络，还是一个无尺度网络？单词之间的关系会不会遵循六度分隔理论呢？**

实现广度优先搜索(Breadth First Search)

- 在单词关系图建立完成以后，需要继续在图中寻找词梯问题的最短序列。
- 需要用到“广度优先搜索Breadth First Search:BFS”算法对单词关系图进行搜索
- BFS是搜索图的最简单算法之一，也是其它一些重要的图算法的基础
- 给定图G，以及开始搜索的起始顶点s

  BFS搜索所有从s可到达顶点的边

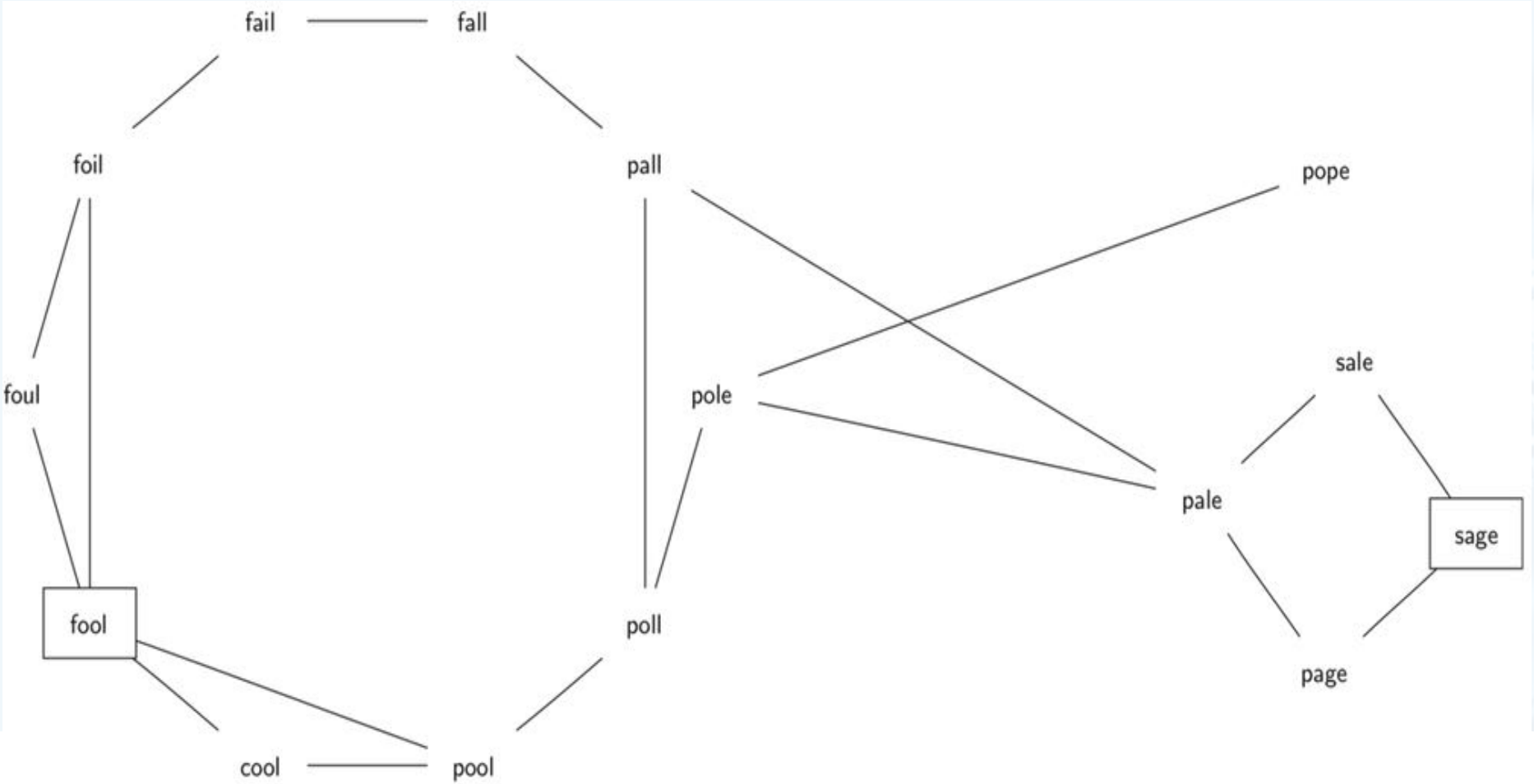
  而且在达到更远的距离k+1的顶点之前，BFS会找到全部距离为k的顶点

  可以想象为以s为根，构建一棵树的过程，从顶部向下逐步增加层次

  广度优先搜索能保证在增加层次之前，添加了所有兄弟节点到树中

BFS算法过程

› 我们从FOOL开始搜索



BFS算法过程

- **为了跟踪顶点的加入过程，并避免重复顶点，要为顶点增加3个属性**

  距离distance：从起始顶点到此顶点的路径长度；

  前驱顶点predecessor：可追溯到起始顶点的反向路径；

  颜色color：标识了此顶点是尚未发现（白色）、已经发现（灰色）、还是已经完成探索（黑色）

- **还需要用一个队列Queue来对已发现的顶点进行排列，决定下一个要探索的顶点（队首顶点）**

BFS算法过程

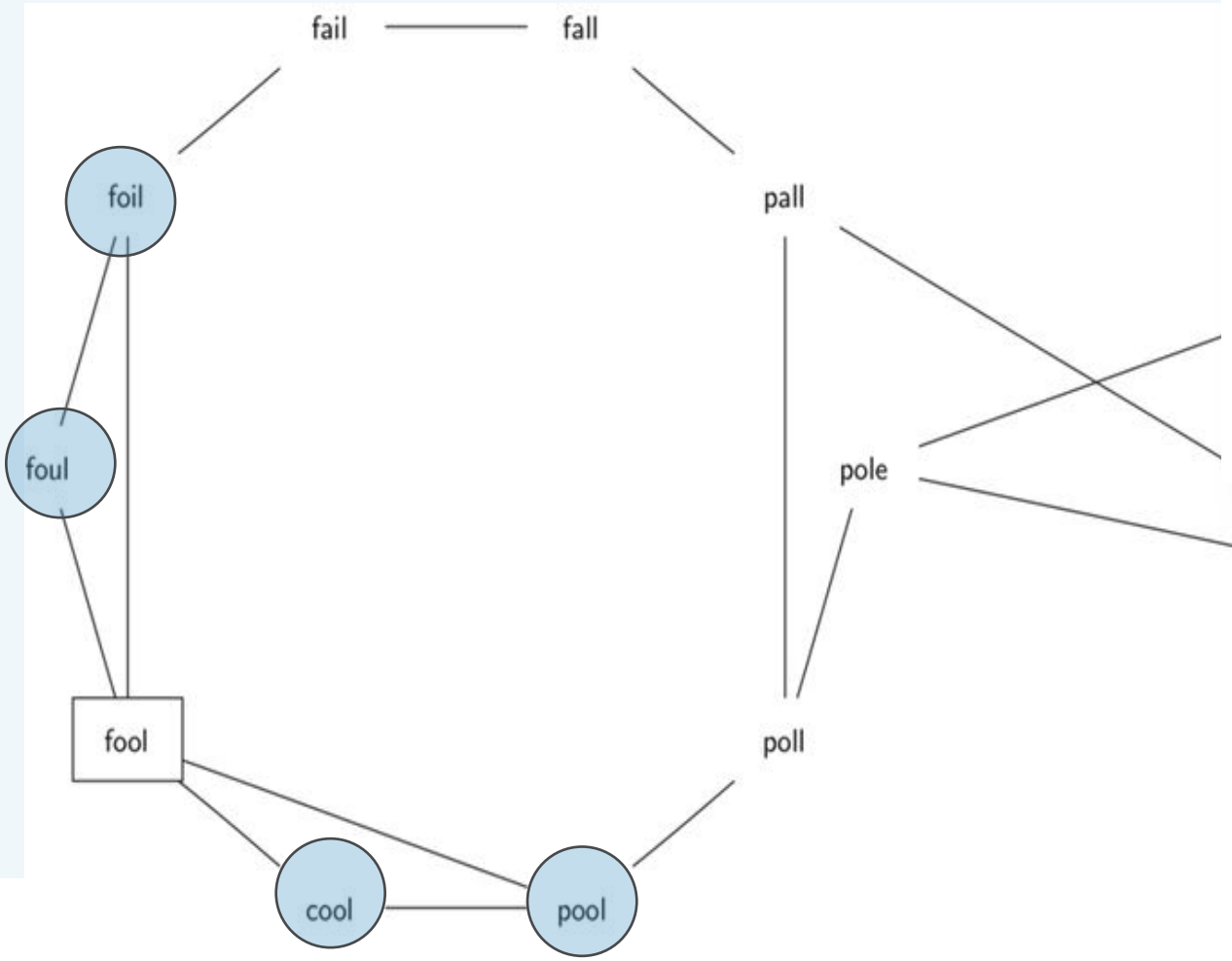
- **从起始顶点s开始，作为刚发现的顶点，标注为灰色，距离为0，前驱为None，加入队列，接下来是个循环迭代过程：**

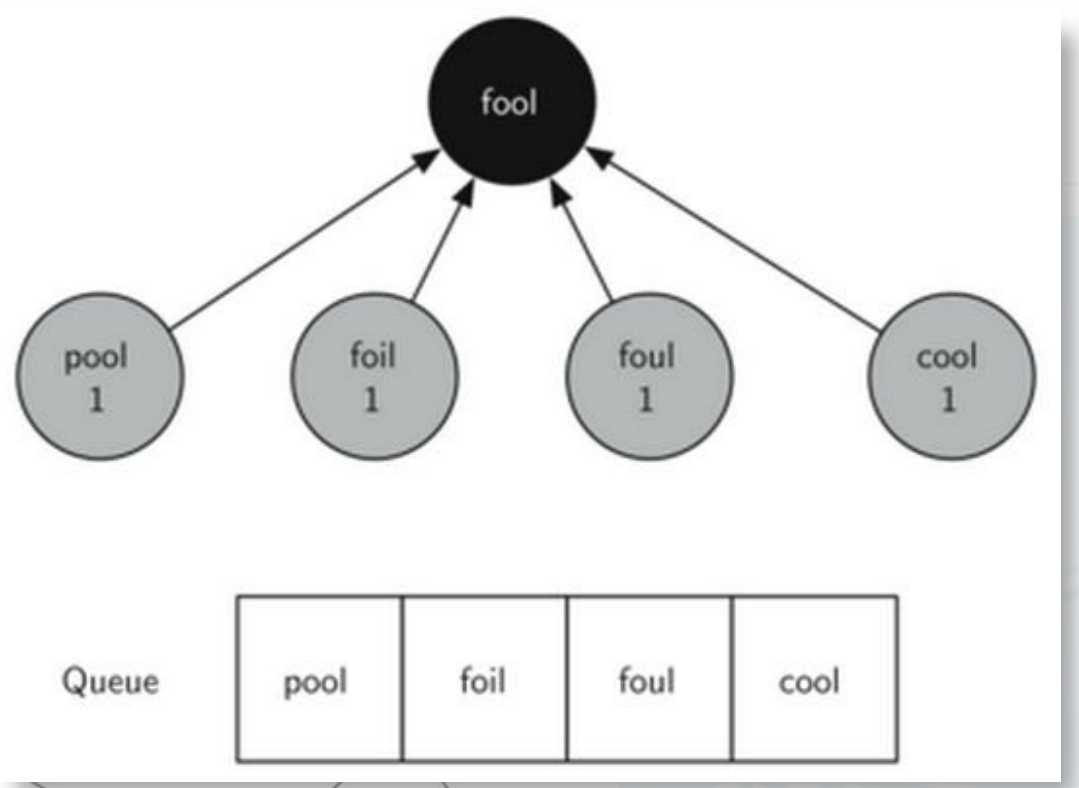
  从队首取出一个顶点作为当前顶点；

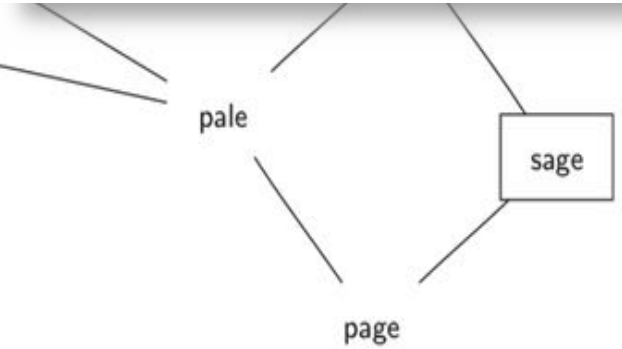
  遍历当前顶点的邻接顶点，如果是尚未发现的白色顶点，则将其颜色改为灰色（已发现），距离增加1，前驱顶点为当前顶点，加入到队列中

  遍历完成后，将当前顶点设置为黑色（已探索过），循环回到步骤1

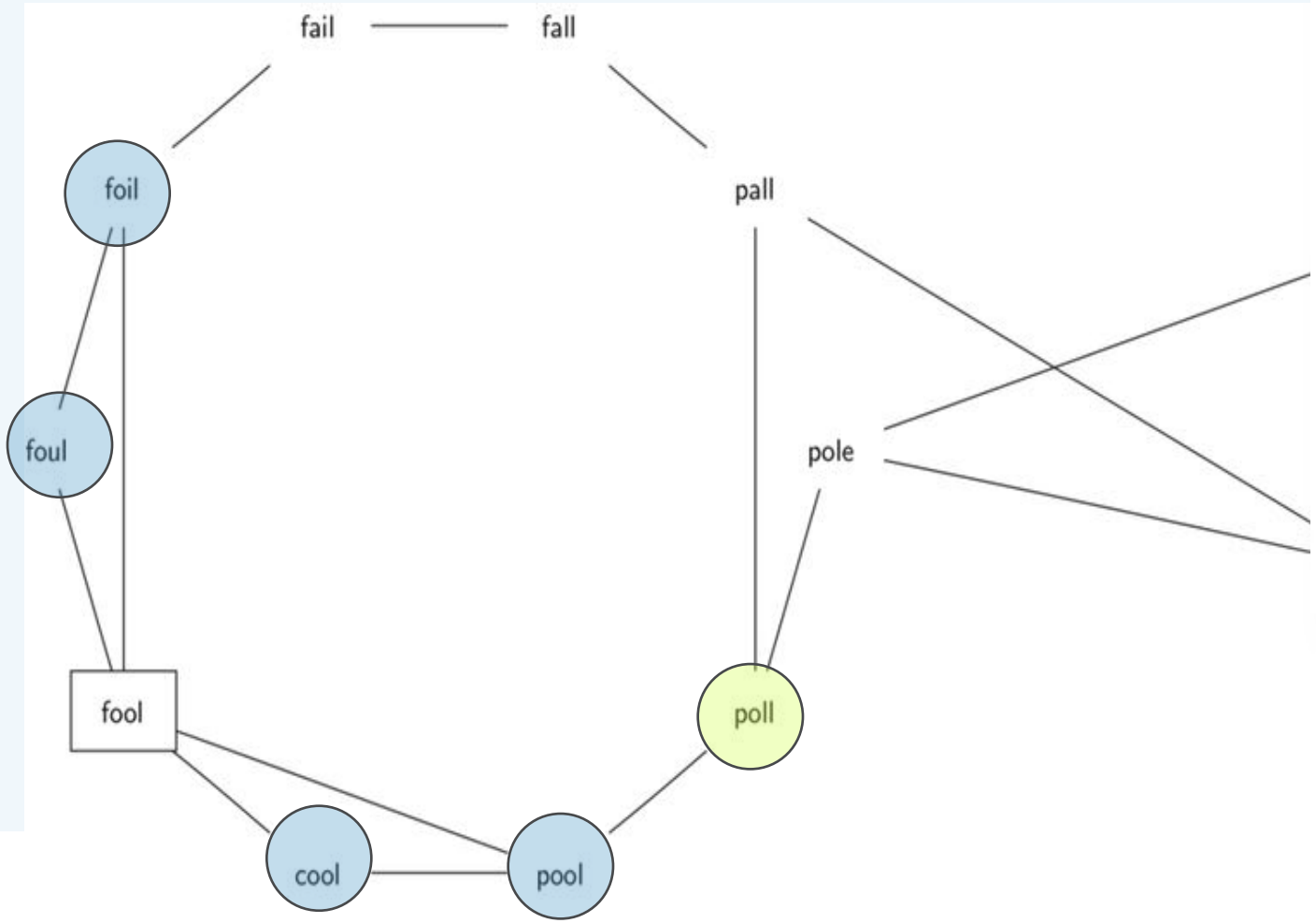
BFS算法实例运行

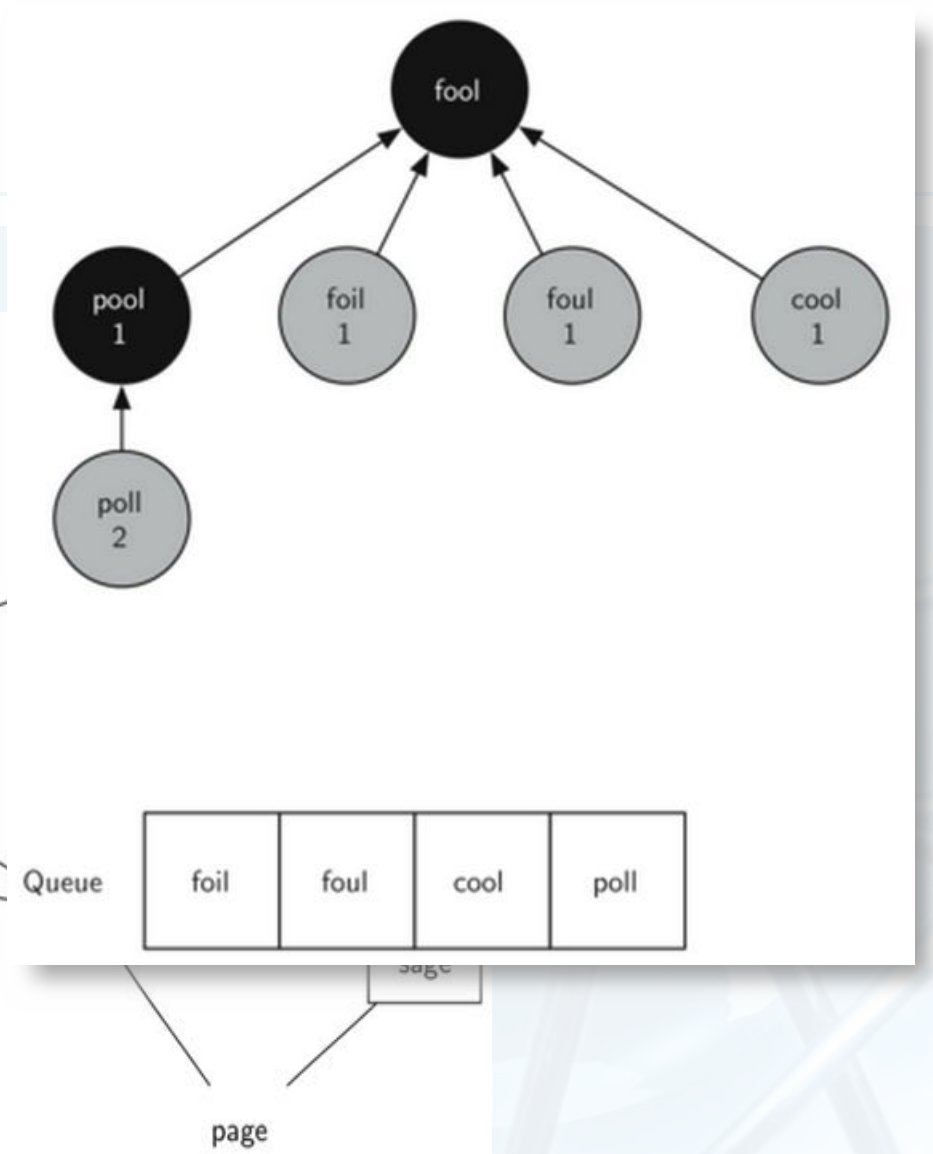

fail
fall
foil
pall
foul
pole
fool
poll
cool
pool


fool
pool
1
foil
1
foul
1
cool
1
Queue
pool
foil
foul
cool

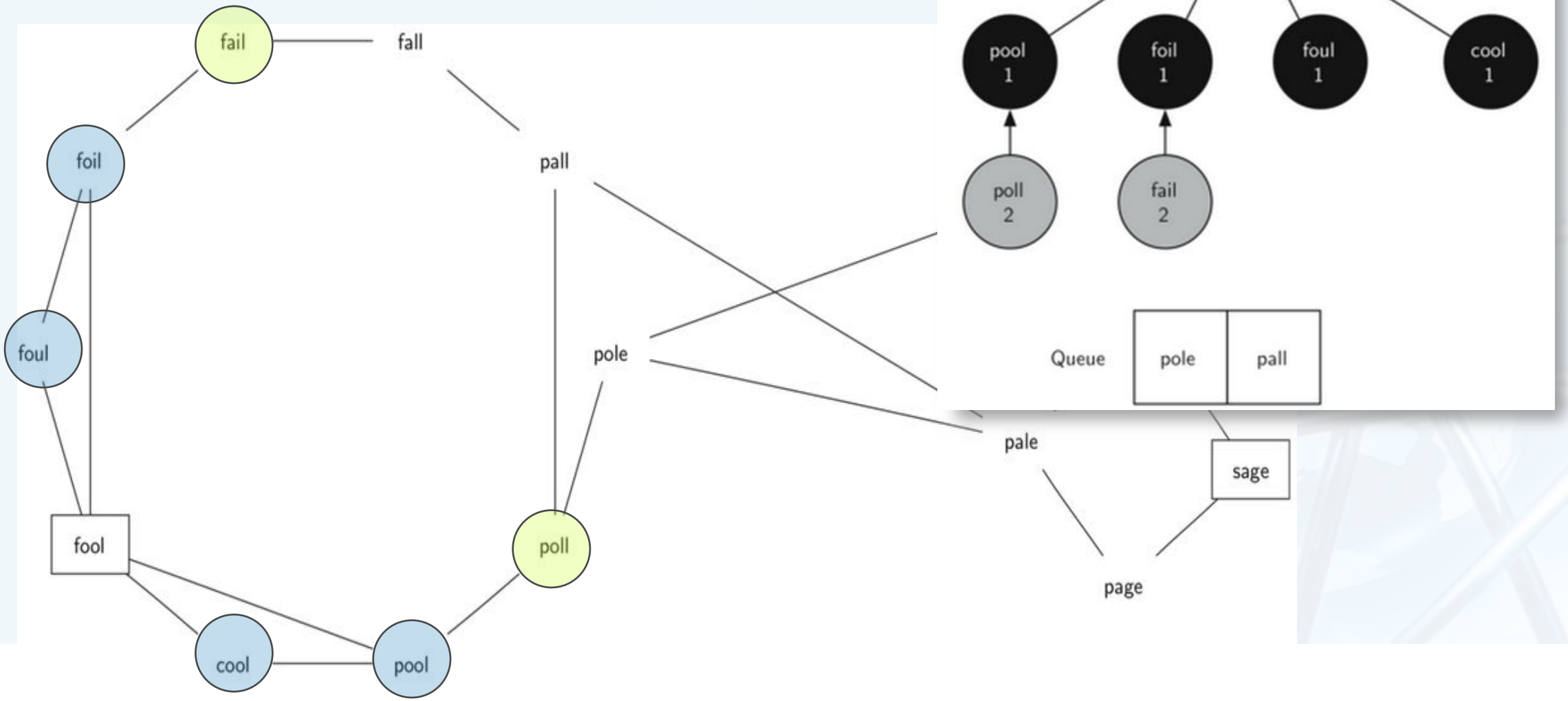

pale
sage
page

BFS算法实例运行

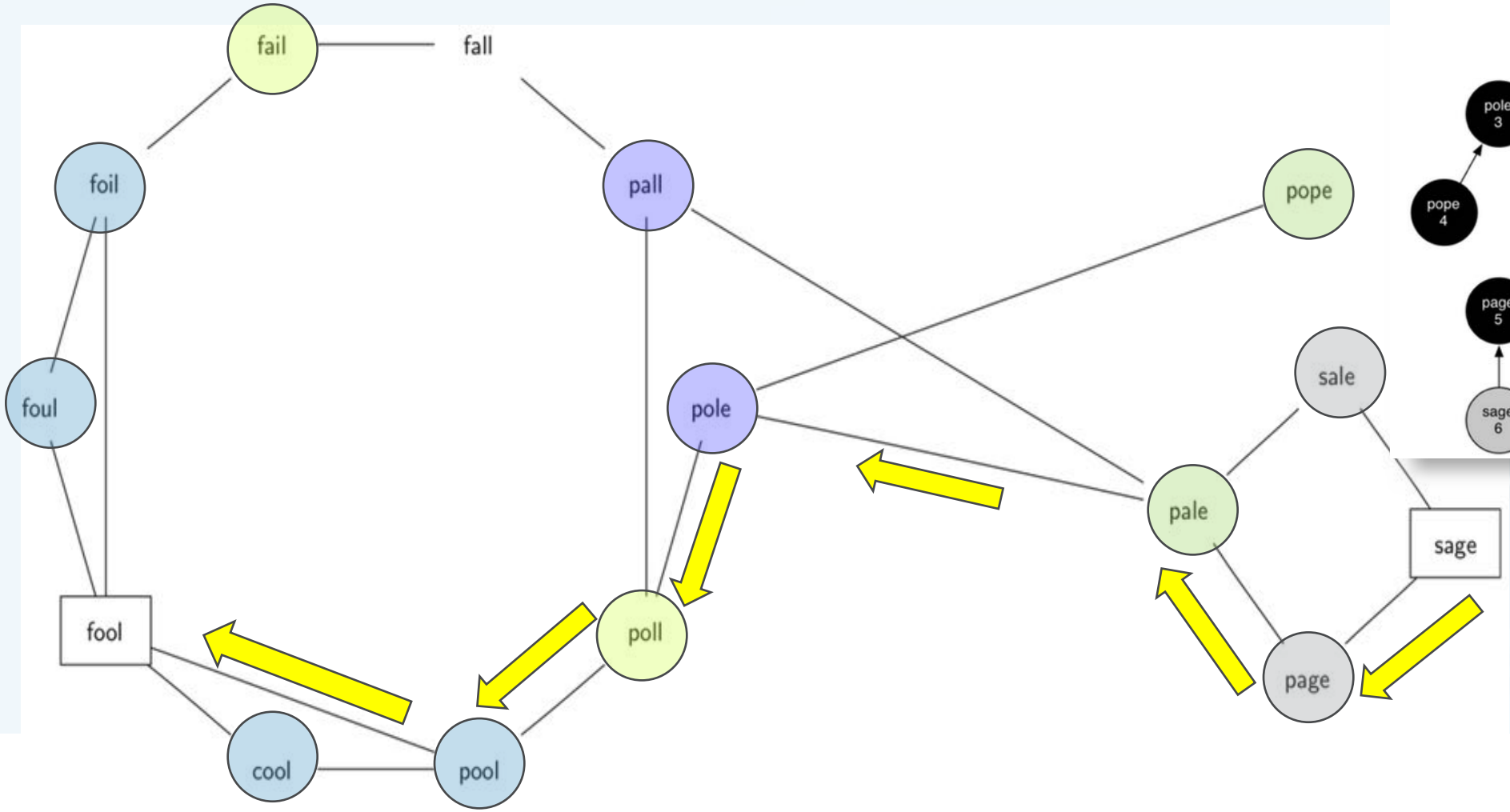

fail
fall
foil
pall
foul
pole
fool
poll
cool
pool

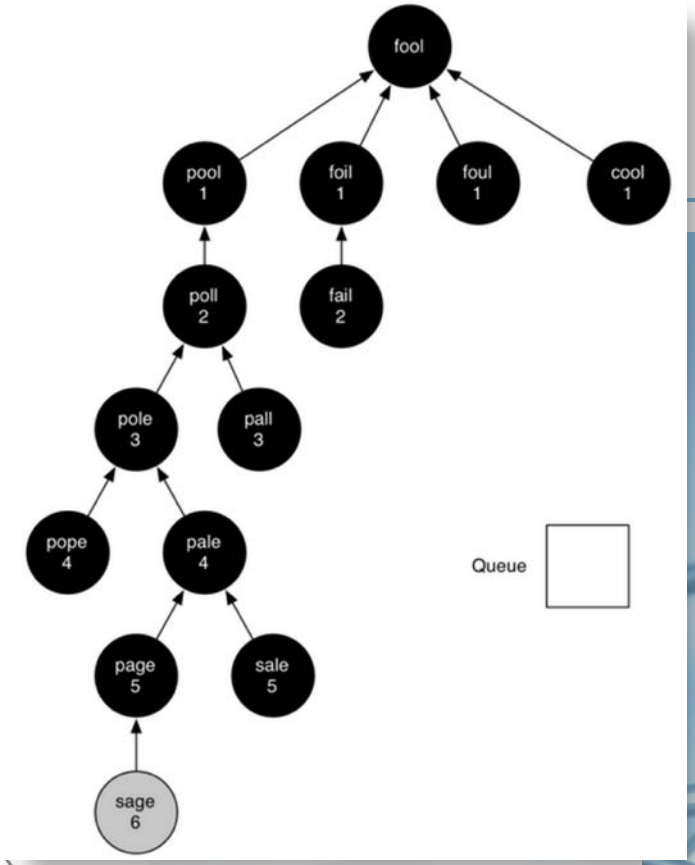

fool
pool
1
foil
1
foul
1
cool
1
poll
2
Queue
foil
foul
cool
poll
page

BFS算法实例运行


fail
fall
foil
pall
foul
pole
fool
poll
cool
pool
fool
pool 1
foil 1
foul 1
cool 1
poll 2
fail 2
Queue
pole
pall
pale
sage
page

BFS算法实例运行


fail
fall
foil
pall
pope
foul
pole
sale
pale
sage
fool
poll
page
cool
pool


fool
pool 1
foil 1
foul 1
cool 1
poll 2
fail 2
pole 3
pall 3
pope 4
pale 4
page 5
sale 5
sage 6
Queue

BFS算法代码


```
def bfs(g,start):
  start.setDistance(0)
  start.setPred(None)
  vertQueue = Queue()
  vertQueue.enqueue(start)
  while (vertQueue.size() > 0):
    currentVert = vertQueue.dequeue()
    for nbr in currentVert.getConnections():
      if (nbr.getColor() == 'white'):
        nbr.setColor('gray')
        nbr.setDistance(currentVert.getDistance() + 1)
        nbr.setPred(currentVert)
        vertQueue.enqueue(nbr)
    currentVert.setColor('black')
```

取队首作为当前顶点

遍历当前顶点邻接顶点

当前顶点设黑色

BFS算法代码

- 在BFS以FOOL为起始顶点，遍历了所有顶点，并为每个顶点着色、赋距离和前驱之后
- 即可以通过一个回途追溯函数来确定FOOL到任何单词顶点的最短词梯！
- 思考：BFS能得到
- 所有的最短词梯解么？
- 为什么？

```
def traverse(y):
    x = y
    while (x.getPred()):
        print(x.getId())
        x = x.getPred()
    print(x.getId())


wordgraph = buildGraph("fourletterwords.txt")

bfs(wordgraph, wordgraph.getVertex('FOOL'))

traverse(wordgraph.getVertex('SAGE'))

#traverse(wordgraph.getVertex('COOL'))
```

广度优先搜索算法分析

- **BFS算法主体是两个循环的嵌套：while-for**

  while循环对图中每个顶点访问一次，所以是O(|V|)

  而嵌套在while中的for，由于每条边只有在其起始顶点u出队的时候才会被检查一次，而每个顶点最多出队1次，所以边最多被检查1次，一共是O(|E|)

  综合起来BFS的时间复杂度为O(|V|+|E|)

- **词梯问题还包括两个部分算法**

  建立BFS树之后，回溯顶点到起始顶点的过程，最多为O(|V|)

  创建单词关系图也需要时间，思考：其复杂度为多少？

广度优先搜索算法分析

- **课后练习1**

  整理词梯问题完整算法（ADT Graph实现、buildGraph、BFS、traverse）

- **课后练习2**

  用嵌套列表作为矩阵来实现ADT Graph

骑士周游问题Knight's Tour Problem

- 在一个国际象棋棋盘上，一个棋子“马”（骑士），按照“马走日”的规则，从一个格子出发，要走遍所有棋盘格恰好一次。
  把一个这样的走棋序列称为一次“周游”
- 在8×8的国际象棋棋盘上，合格的“周游”数量有1.305×10^{35}这么多，走棋过程中失败的周游就更多了
- 采用图搜索算法，是解决骑士周游问题最容易理解和编程的方案之一，解决方案还是分为两步：
  首先将合法走棋次序表示为一个图
  采用图搜索算法搜寻一个长度为（行×列-1）的路径
  路径上包含每个顶点恰一次

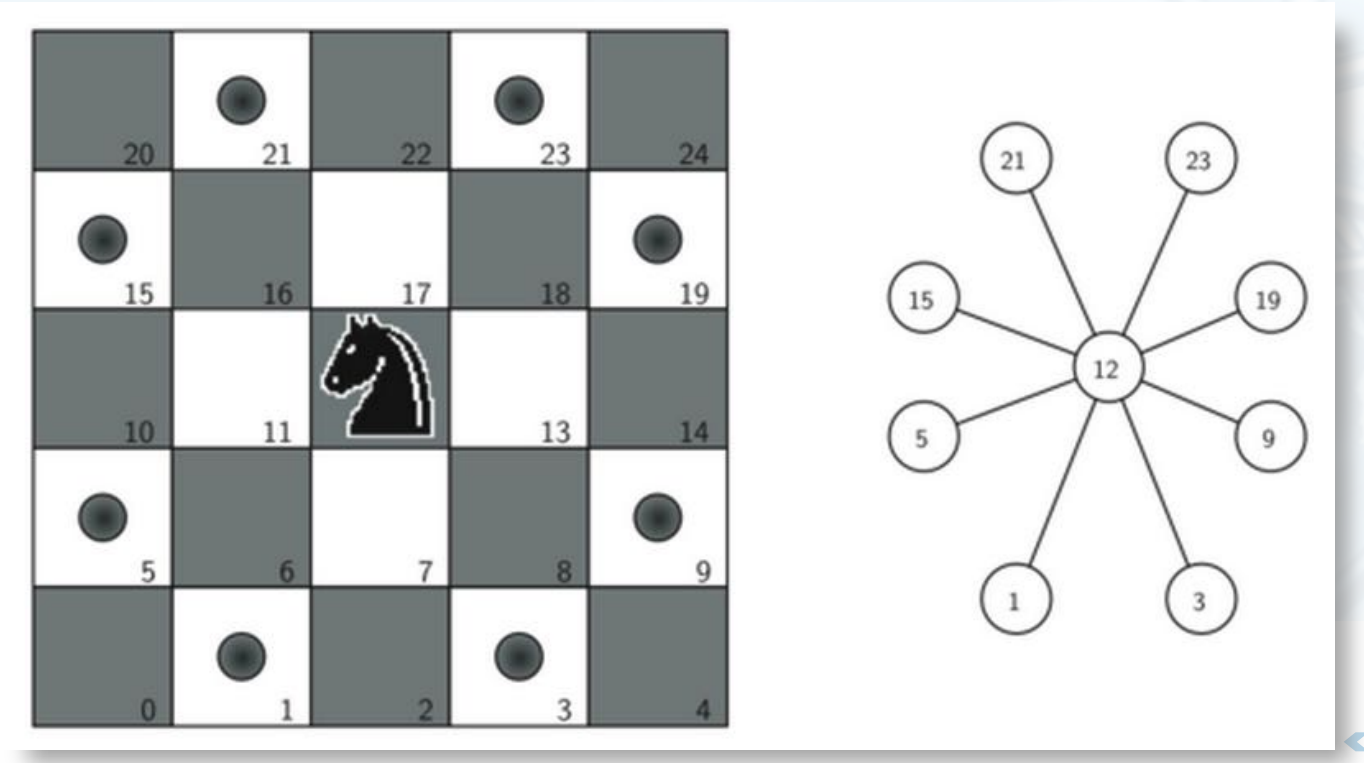
构建骑士周游图

将棋盘和走棋步骤构建为图的思路，顶点和边

将棋盘格作为顶点

按照“马走日”规则的合法走棋步骤作为顶点之间的连接边

建立每一个棋盘格的所有合法走棋步骤能够到达的棋盘格关系图



遍历每个格

单步合法走棋

添加边及顶点

```
def knightGraph(bdSize):
    ktGraph = Graph()
    for row in range(bdSize):
        for col in range(bdSize):
            nodeId = posToNodeId(row,col,bdSize)
            newPositions = genLegalMoves(row,col,bdSize)
            for e in newPositions:
                nid = posToNodeId(e[0],e[1],bdSize)
                ktGraph.addEdge(nodeId,nid)
    return ktGraph

def posToNodeId(row,col,bdSize):
    return row*bdSize+col
```

马走日8个格子

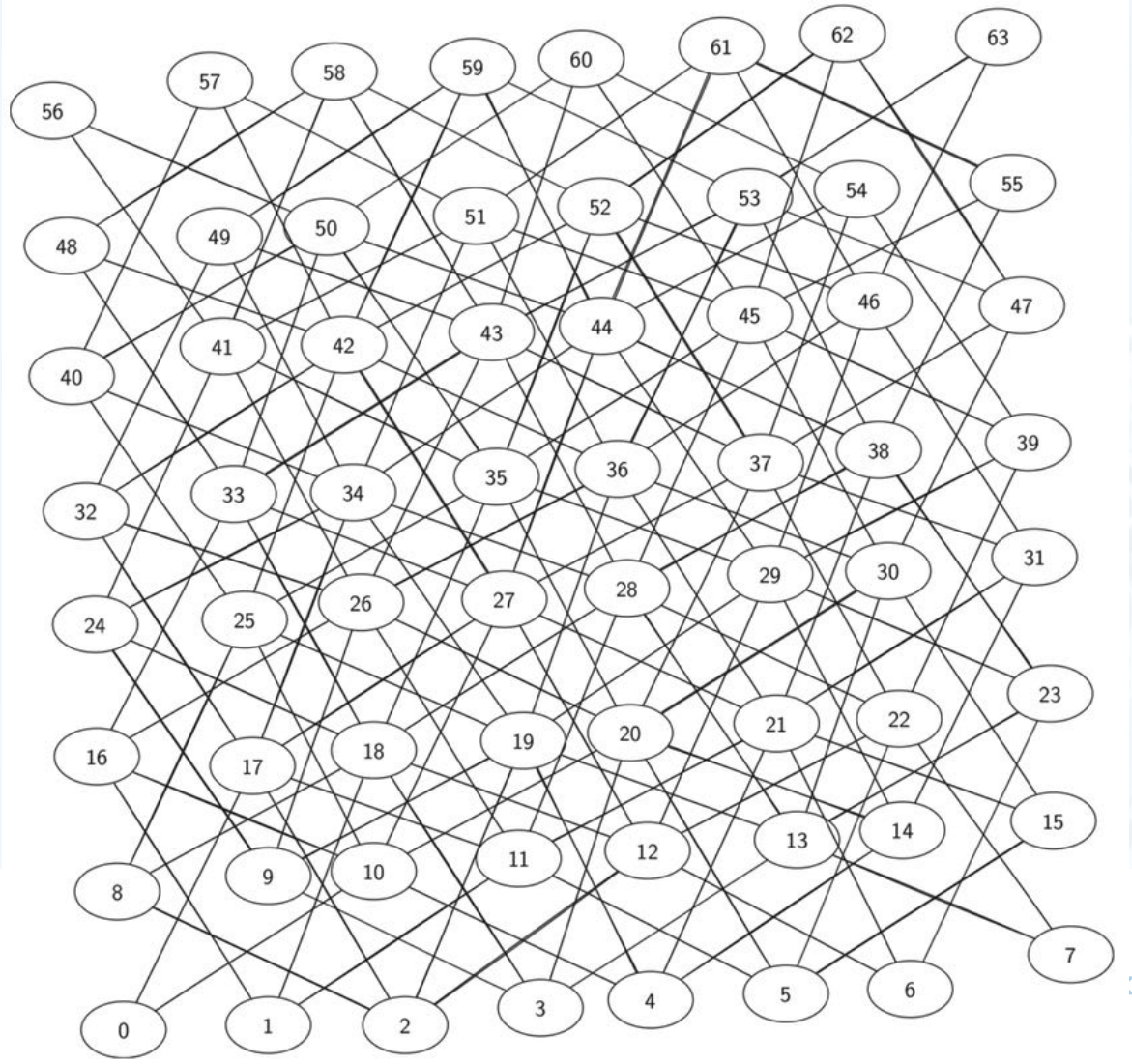
确认不会走出棋盘

```
def genLegalMoves(x,y,bdSize):
    newMoves = []
    moveOffsets = [(-1,-2),(-1,2),(-2,-1),(-2,1),
                   ( 1,-2),( 1,2),( 2,-1),( 2,1)]
    for i in moveOffsets:
        newX = x + i[0]
        newY = y + i[1]
        if legalCoord(newX,bdSize) and legalCoord(newY,bdSize):
            newMoves.append((newX,newY))
    return newMoves

def legalCoord(x,bdSize):
    if x >= 0 and x < bdSize:
        return True
    else:
        return False
```

骑士周游图：8×8棋盘生成的图

- 具有336条边，相比起全连接的4096条边，仅8.2%，还是稀疏图



骑士周游算法实现

- 用于解决骑士周游问题的图搜索算法是深度优先搜索（Depth First Search:DFS）
- 相比前述的广度优先搜索，其逐层建立搜索树的特点，深度优先搜索是沿着树的单支尽量深入向下搜索，如果到无法继续的程度还未找到问题解，就回溯上一层再搜索下一支
- 下面介绍DFS的两个实现算法

  一个DFS算法用于解决骑士周游问题，其特点是每个顶点仅访问一次

  另一个DFS算法更为通用，允许顶点被重复访问，可作为其它图算法的基础

骑士周游算法实现

- **深度优先搜索解决骑士周游的关键思路在于：**

  如果沿着单支深入搜索到无法继续（所有合法移动都已经被走过了）时

  路径长度还没有达到预定值（8×8棋盘为63）

  那么就清除颜色标记，返回到上一层，换一个分支继续深入搜索。

骑士周游算法代码


```
def knightTour(n,path,u,limit):
    u.setColor('gray')
    path.append(u)
    if n < limit:
        nbrList = list(u.getConnections())
        i = 0
        done = False
        while i < len(nbrList) and not done:
            if nbrList[i].getColor() == 'white':
                done = knightTour(n+1, path, nbrList[i], limit)
            i = i + 1
        if not done:  # prepare to backtrack
            path.pop()
            u.setColor('white')
    else:
        done = True
    return done
```

n:层次；path:路径；u:当前顶点；limit:搜索总深度

当前顶点加入路径

对所有合法移动逐一深入

选择白色未经过的顶点深入

都无法完成总深度，回溯，试本层下一个顶点

层次加1，递归深入

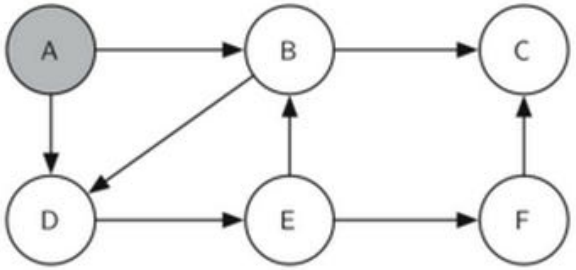


Figure 3: Start with node A

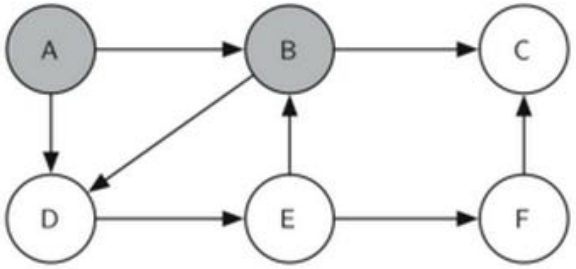


Figure 4: Explore B

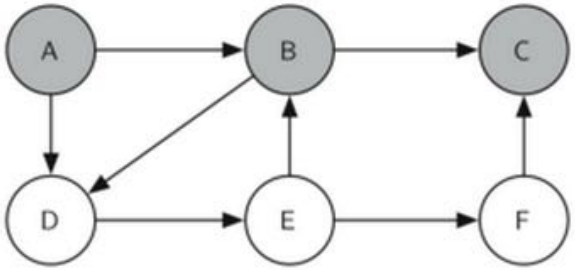


Figure 5: Node C is a dead end

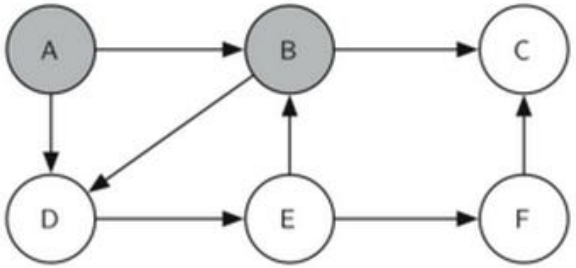


Figure 6: Backtrack to B

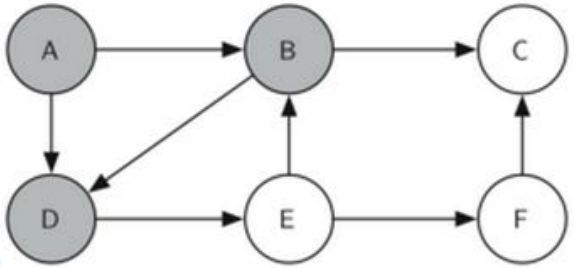


Figure 7: Explore D

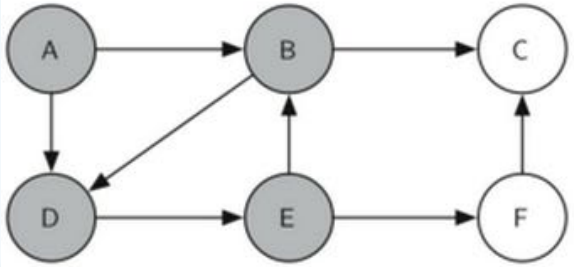


Figure 8: Explore E

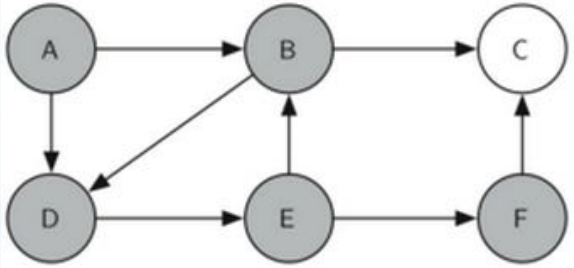


Figure 9: Explore F

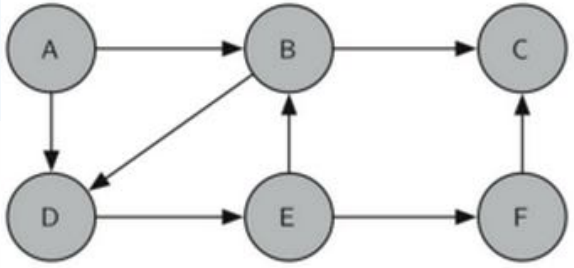
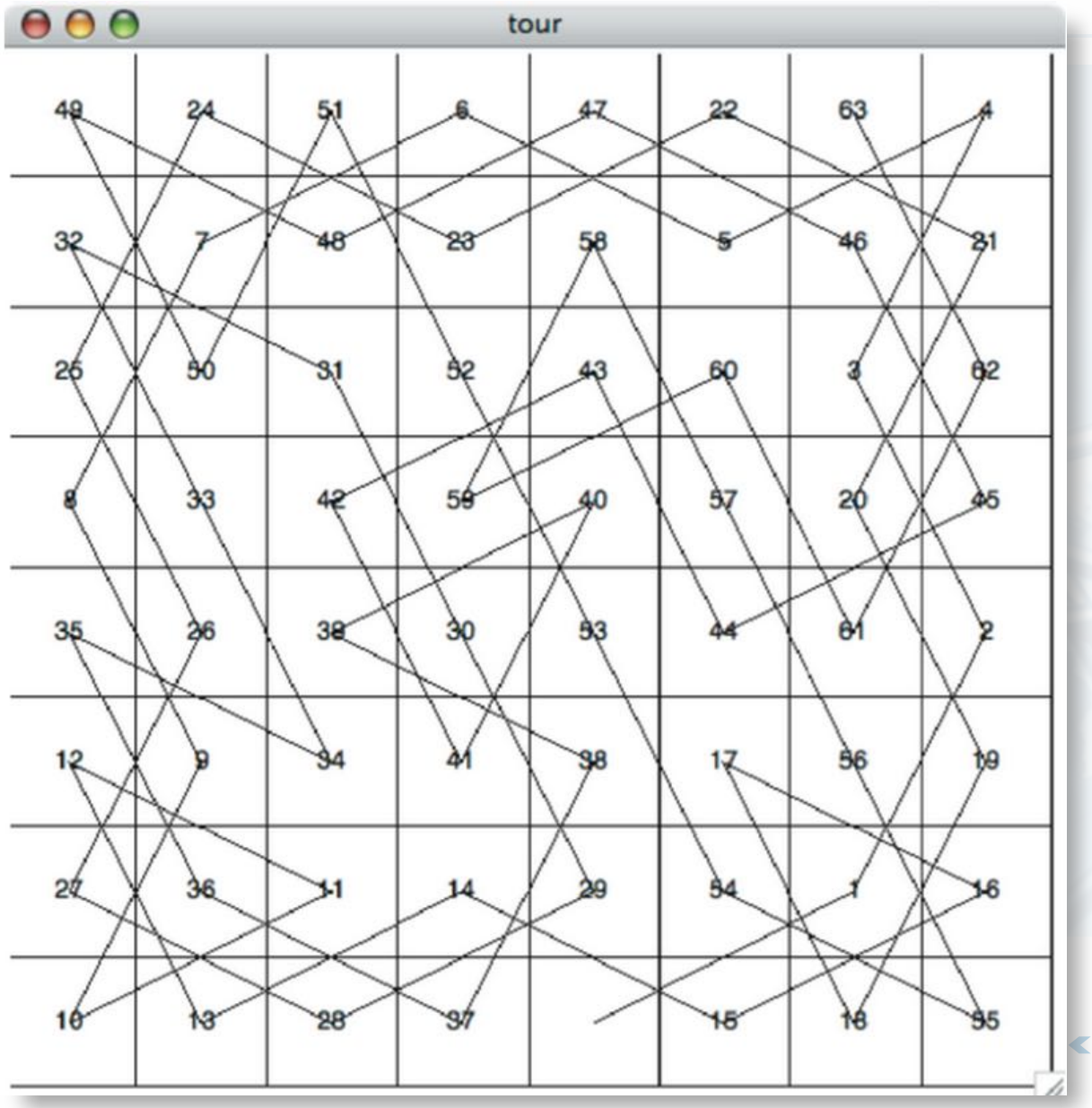


Figure 10: Finish

骑士周游问题：一个解


tour
49 24 51 6 47 22 63 4
32 7 48 23 58 5 46 21
25 50 31 52 43 60 3 62
8 33 42 59 40 57 20 45
35 26 38 30 53 44 61 2
12 9 34 41 18 17 56 19
27 36 11 14 29 54 1 16
10 13 28 37 15 18 55

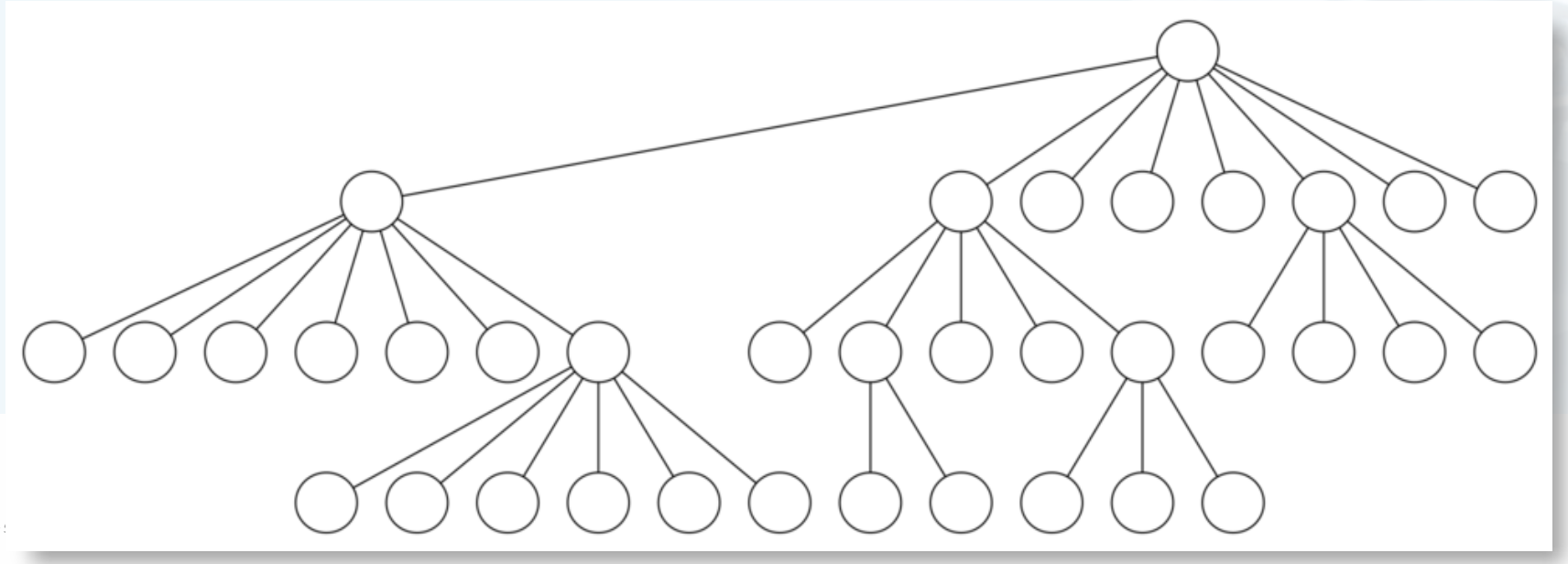
骑士周游算法分析

- **上述算法knightTour的性能高度依赖于深入顶点nbrList的搜索次序：**

  就5×5的棋盘而言，大约1.5秒可以得到一个周游路径

  但8×8的棋盘上，则需要半个小时以上的时间才能得到一个解！

- **目前实现的算法，其复杂度为$O(k^n)$，其中n是棋盘格数目，这是一个指数时间复杂度的算法！其搜索过程表现为一个层次为n的树**



骑士周游算法改进

- **幸运的是，即便是指数时间复杂度算法也可以在实际性能上加以大幅度改进**
  对nbrList的灵巧构造，以特定方式排列顶点访问次序，可以使得8×8棋盘的周游路径搜索时间降低到秒级！

- **初始算法中nbrList= list(u.getConnections())，直接以原始顺序来确定深度优先搜索的分支次序，新的算法，仅修改了nbrList= orderByAvail(u)**
  将u的合法移动目标棋盘格排序为：具有最少合法移动目标的格子优先搜索

思考：为什么能提高性能？

尝试：相反的次序会如何？

```
def orderByAvail(n):
    resList = []
    for v in n.getConnections():
        if v.getColor() == 'white':
            c = 0
            for w in v.getConnections():
                if w.getColor() == 'white':
                    c = c + 1
            resList.append((c,v))
    resList.sort(key=lambda x: x[0])
    return [y[1] for y in resList]
```

骑士周游算法改进

- **这个改进算法被特别以发明者名字命名：Warnsdorff算法**
- **采用先验的知识来改进算法性能的做法，称作为“启发式规则heuristic”**

  启发式规则经常用于人工智能领域；

  可以有效地减小搜索范围、更快达到目标等等；

  如棋类程序算法，会预先存入棋谱、布阵口诀、高手习惯等“启发式规则”，能够在最短时间内从海量的棋局落子点搜索树中定位最佳落子。

  - 例如：黑白棋中的“金角银边”口诀，指导程序优先占边角位置等等

通用的深度优先搜索

- **骑士周游问题是一种特殊的对图进行深度优先搜索，其目的是建立一个没有分支的最深的深度优先树**
- **一般的深度优先搜索实际上更为容易，其目标是在图上进行尽量深的搜索，连接尽量多的顶点，必要时可以进行分支（创建了树）**

有时候深度优先搜索会创建多棵树，称为“深度优先森林”

深度优先搜索同样要用到顶点的“前驱”属性，来构建树或森林

另外还要设置“发现时间”和“结束时间”两个属性

- 前者是算法在第几步访问到这个顶点（设置灰色）
- 后者则是算法在第几步完成了此顶点的探索（设置黑色）

这两个新属性对后面的图算法很重要

通用的深度优先搜索

- **我们把带有DFS算法的图实现为Graph的子类**

  顶点Vertex增加了成员Discovery及Finish

  图Graph增加了成员time用于记录算法执行的步骤数目

通用的深度优先搜索算法代码

BFS采用队列存储待访问顶点
DFS则是通过递归调用，隐式使用了栈

颜色初始化

如果还有未包括的顶点，则建森林

算法的步数

深度优先递归访问

```
from pythonds.graphs import Graph
class DFSGraph(Graph):
    def __init__(self):
        super().__init__()
        self.time = 0

    def dfs(self):
        for aVertex in self:
            aVertex.setColor('white')
            aVertex.setPred(-1)
        for aVertex in self:
            if aVertex.getColor() == 'white':
                self.dfsvisit(aVertex)

    def dfsvisit(self,startVertex):
        startVertex.setColor('gray')
        self.time += 1
        startVertex.setDiscovery(self.time)
        for nextVertex in startVertex.getConnections():
            if nextVertex.getColor() == 'white':
                nextVertex.setPred(startVertex)
                self.dfsvisit(nextVertex)
        startVertex.setColor('black')
        self.time += 1
        startVertex.setFinish(self.time)
```

通用的深度优先搜索算法：示例

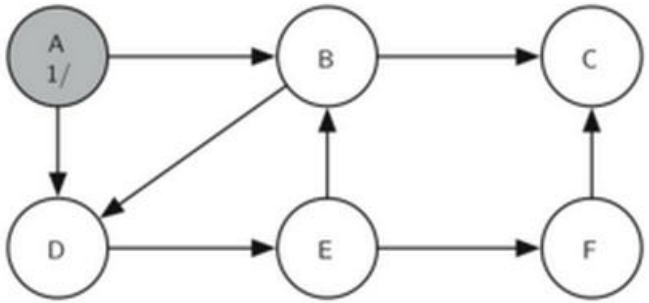


Figure 14: Constructing the Depth First Search Tree-10

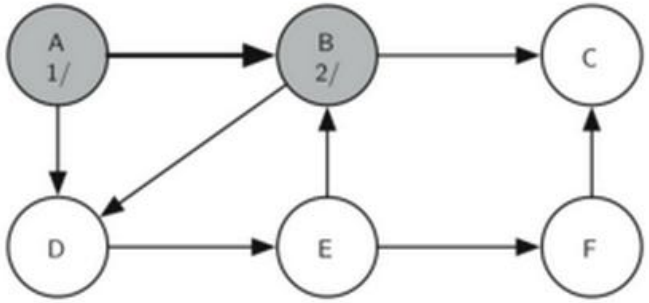


Figure 15: Constructing the Depth First Search Tree-11

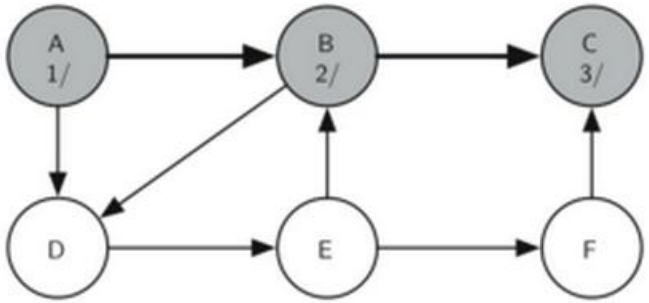


Figure 16: Constructing the Depth First Search Tree-12

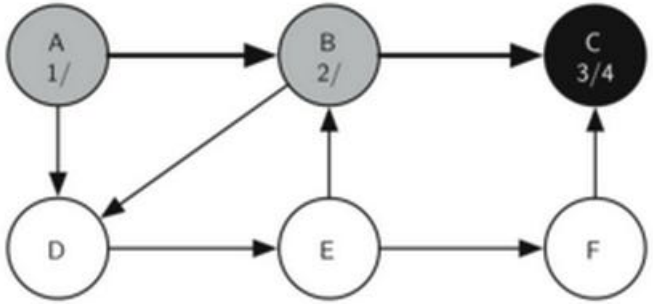


Figure 17: Constructing the Depth First Search Tree-13

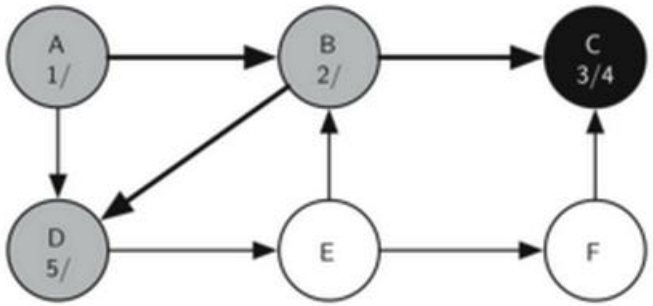


Figure 18: Constructing the Depth First Search Tree-14

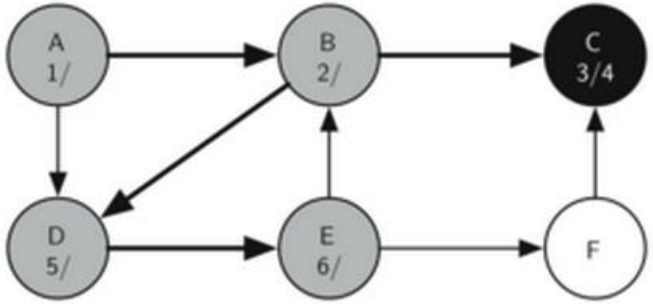


Figure 19: Constructing the Depth First Search Tree-15

通用的深度优先搜索算法：示例

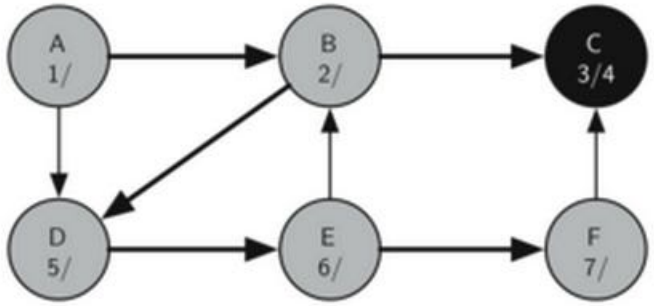


Figure 20: Constructing the Depth First Search Tree-16

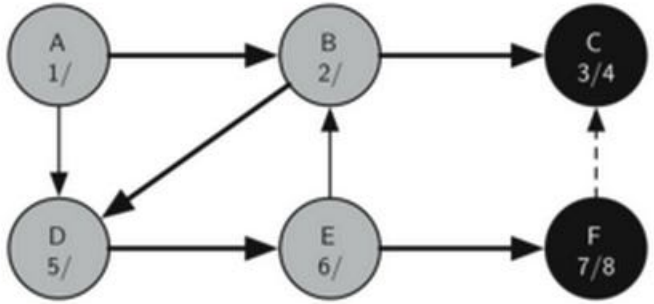


Figure 21: Constructing the Depth First Search Tree-17

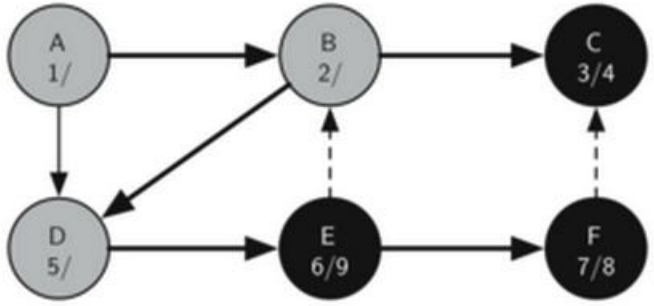


Figure 22: Constructing the Depth First Search Tree-18

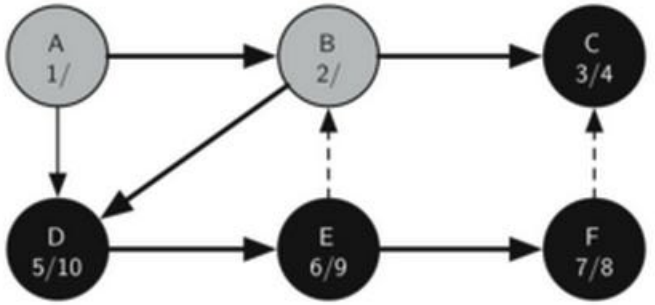


Figure 23: Constructing the Depth First Search Tree-19

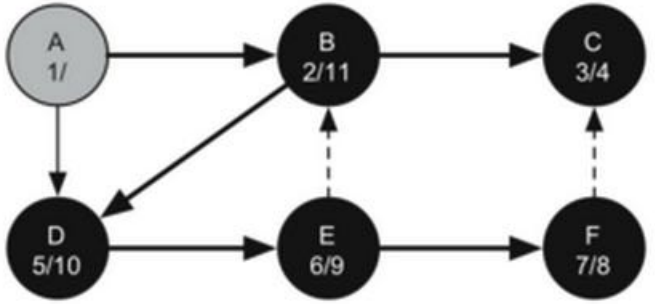


Figure 24: Constructing the Depth First Search Tree-20

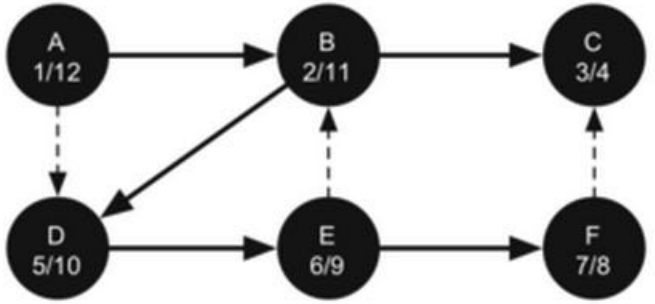


Figure 25: Constructing the Depth First Search Tree-21

通用的深度优先搜索算法：分析

- **DFS构建的树，其顶点上的“发现时间”和“结束时间”属性，具有类似括号的性质：即一个顶点的“发现时间”总小于所有子顶点的“发现时间”，而“结束时间”则大于所有子顶点的“结束时间”**

  比子顶点更早被发现，更晚被结束探索

- **DFS运行时间同样也包括了两方面：**

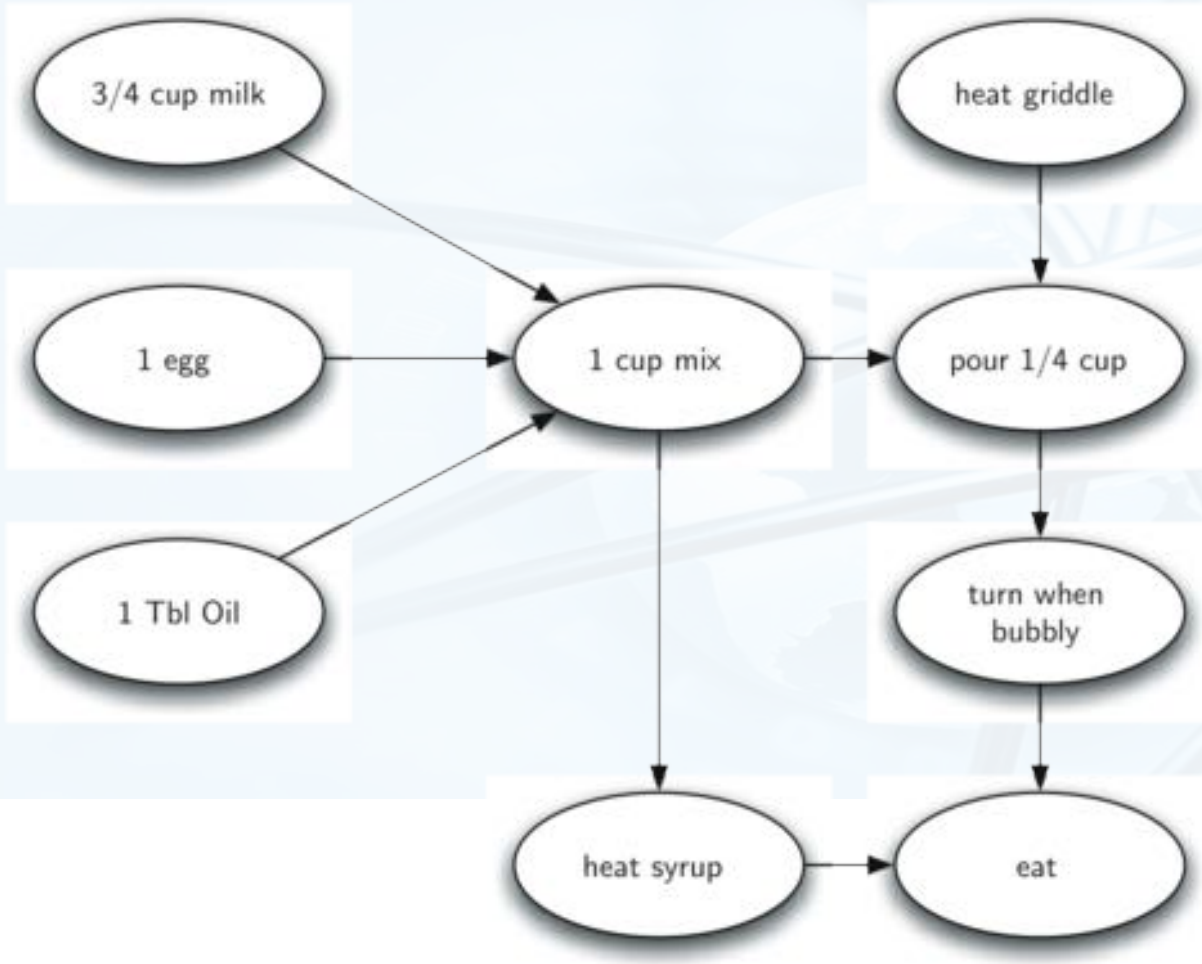
  dfs函数中有两个循环，每个都是|V|次，所以是O(|V|)

  而dfsvisit函数中的循环则是对当前顶点所连接的顶点进行，而且仅有在顶点为白色的情况下才进行递归调用，所以对每条边来说只会运行一步，所以是O(|E|)

  加起来就是和BFS一样的O(|V|+|E|)

拓扑排序Topological Sort

- 很多问题都可以转化为图，利用图算法来解决
- 例如早餐吃薄煎饼的过程
  以动作为顶点
  以先后次序为有向边
- 问题是对整个过程而言
  如果一个人独自做，
  所有动作的先后次序？
- 从加料开始？
  还是从加热烤盘开始？
- 思考：整个过程次序



拓扑排序Topological Sort

- 从工作流程图得到工作次序排列的算法，称为“拓扑排序”
- 拓扑排序处理一个DAG，输出顶点的线性序列，使得两个顶点v,w，如果G中有(v,w)边，在线性序列中v就出现在w之前。
- DAG的广泛应用在依赖事件的排期上，除了吃早餐过程之外，还可以用在项目管理、数据库查询优化和矩阵乘法的次序优化上
- 拓扑排序可以采用DFS很好地实现：

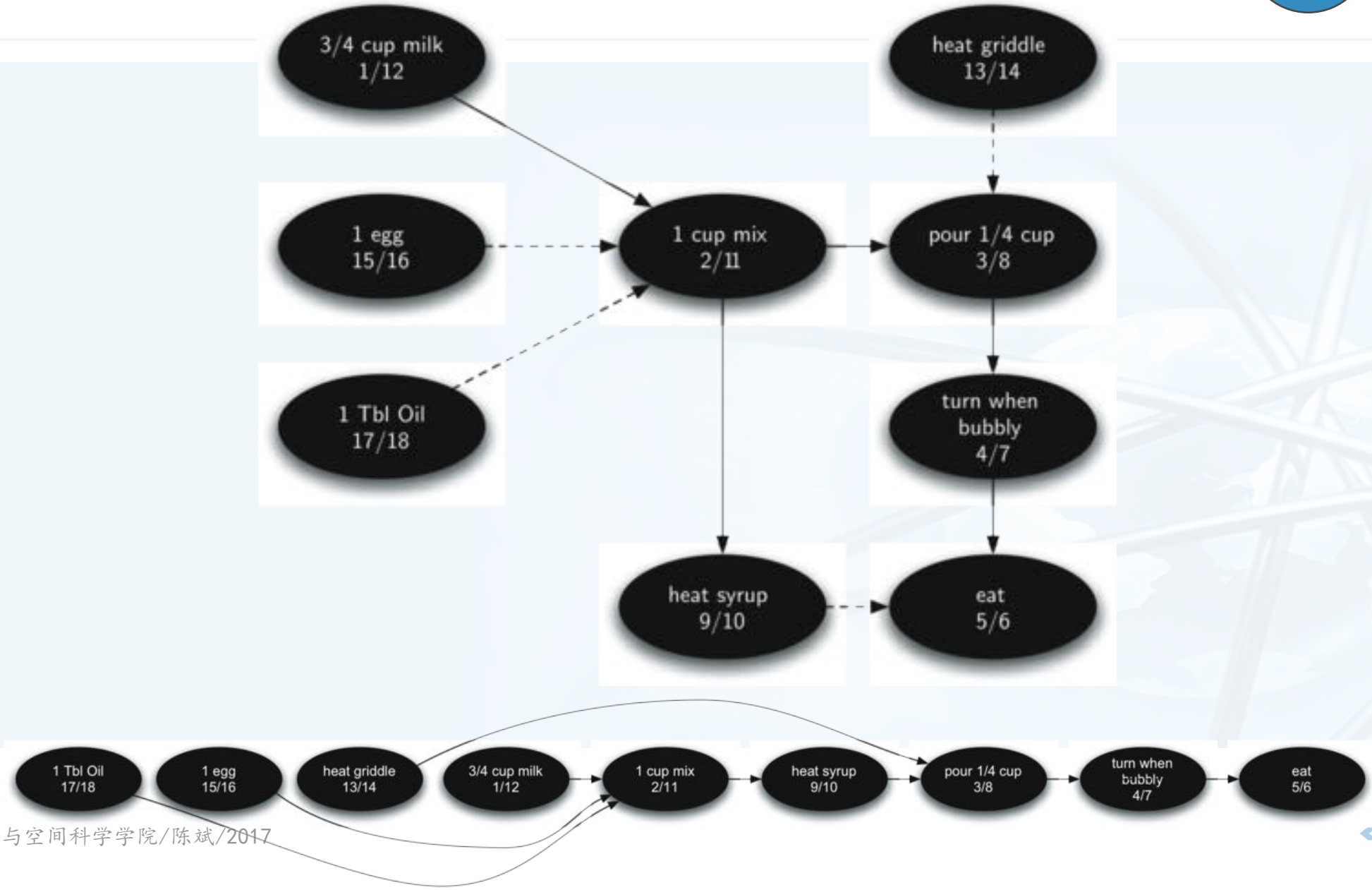
  对DAG图调用DFS算法，以得到每个顶点的“结束时间”

  按照每个顶点的“结束时间”从大到小排序

  输出这个次序下的顶点列表

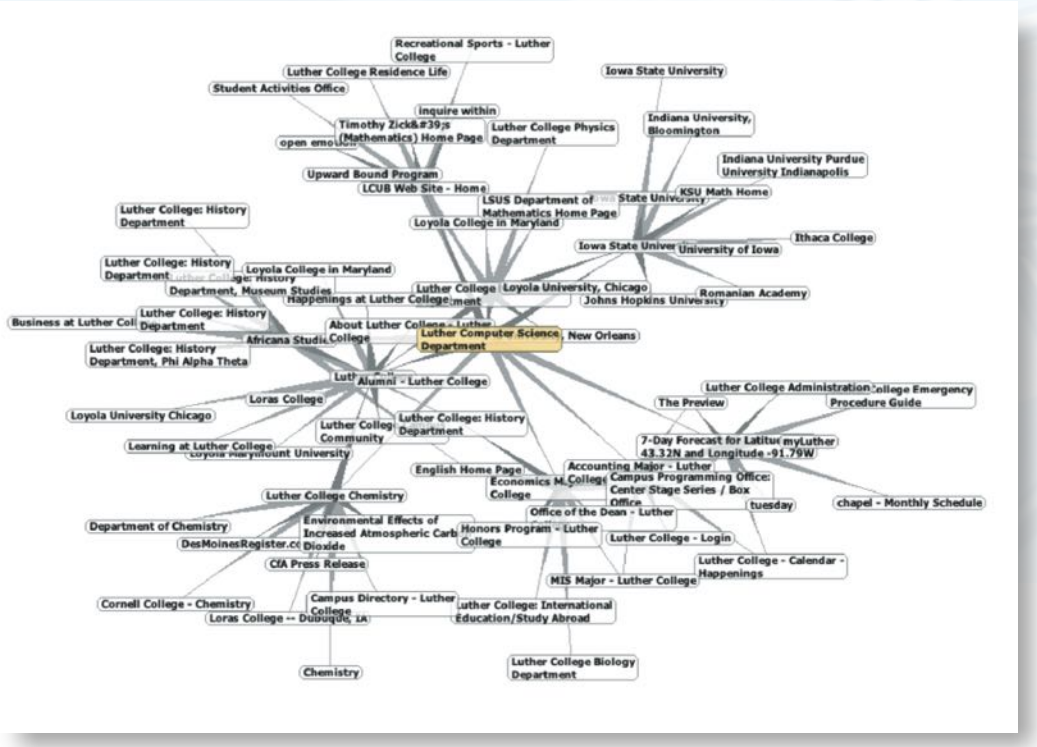
- **课后练习：整理出骑士周游算法、通用DFS以及拓扑排序算法的代码**

拓扑排序：示例


3/4 cup milk
1/12
heat griddle
13/14
1 egg
15/16
1 cup mix
2/11
pour 1/4 cup
3/8
1 Tbl Oil
17/18
turn when
bubbly
4/7
heat syrup
9/10
eat
5/6
1 Tbl Oil
17/18
1 egg
15/16
heat griddle
13/14
3/4 cup milk
1/12
1 cup mix
2/11
heat syrup
9/10
pour 1/4 cup
3/8
turn when
bubbly
4/7
eat
5/6

强连通分支

- 我们关注一下互联网相关的非常巨大图：由主机通过网线（或无线）连接而形成的图；以及由网页通过超链接连接而形成的图。
- 先看网页形成的图：以网页（URI作为id）顶点，网页内包含的超链接（Hyperlink：指向另一个网页的可点击链接）作为边，可以转换为一个有向图。



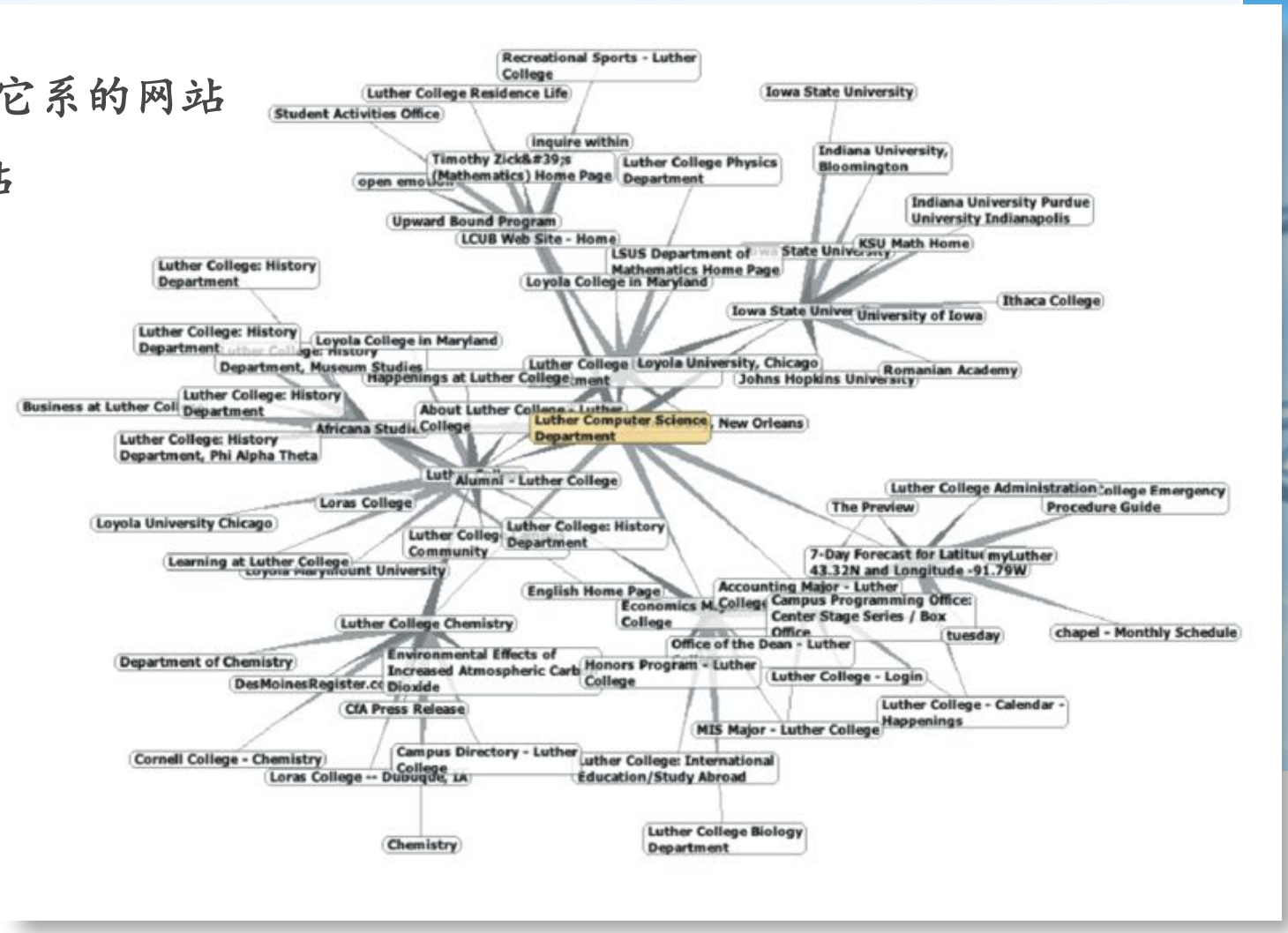
强连通分支

- 上图是Luther College的Computer Science网站链接情况，有三个有趣的现象

图中包含了许多Luther College其它系的网站

包含了一些Iowa其它大学学院的网站

还包含了一些人文学院的网站



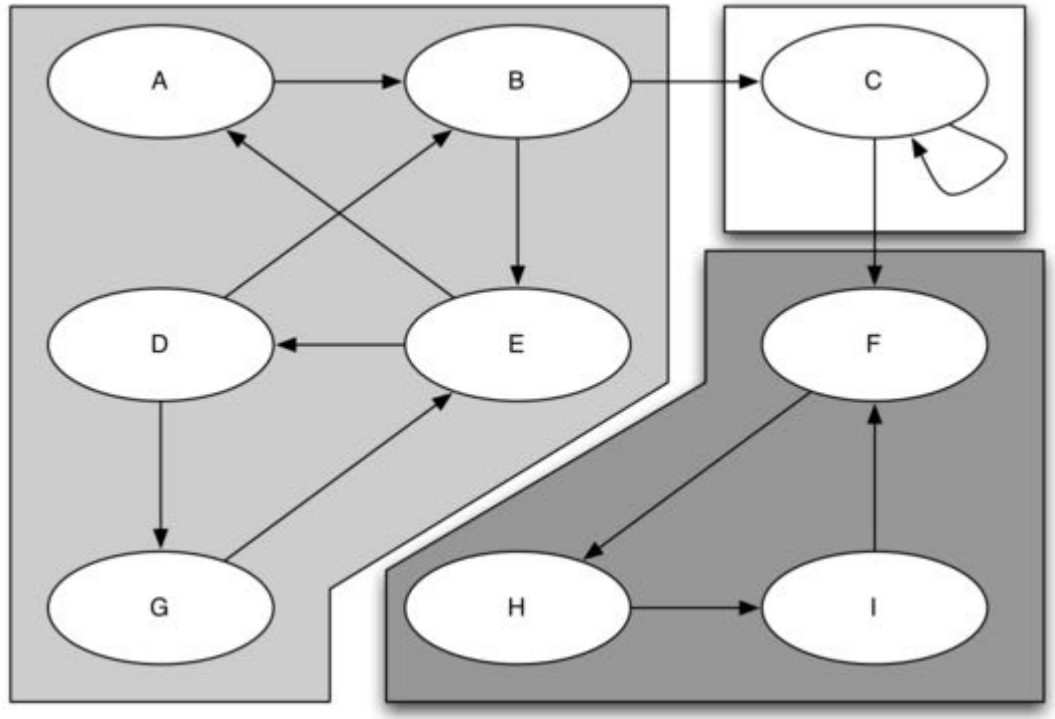
强连通分支

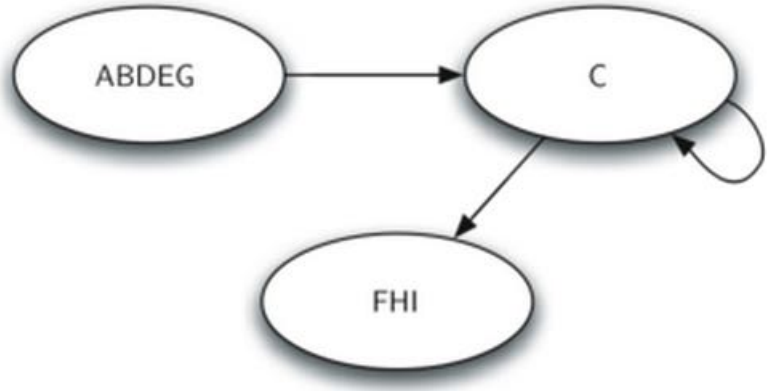
- 我们可以猜想，Web的底层结构可能存在某些同类网站的聚集
- 在图中发现高度聚集节点群的算法，即寻找“强连通分支Strongly Connected Components”算法。
- 强连通分支SCC，定义为图G的一个子集C
- C中的任意两个顶点v,w之间都有路径来回

  即(v,w)(w,v)都是C的路径，
- 而且C是具有这样性质的最大子集

强连通分支例子

- 右图是具有3个强连通分支的9顶点有向图
- 一旦找到强连通分支，可以据此对图的顶点进行分类，并对图进行化简。



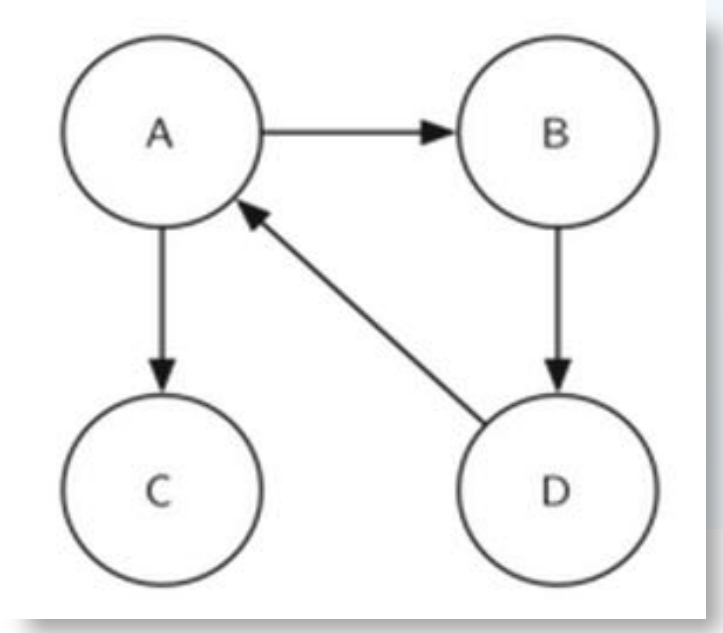


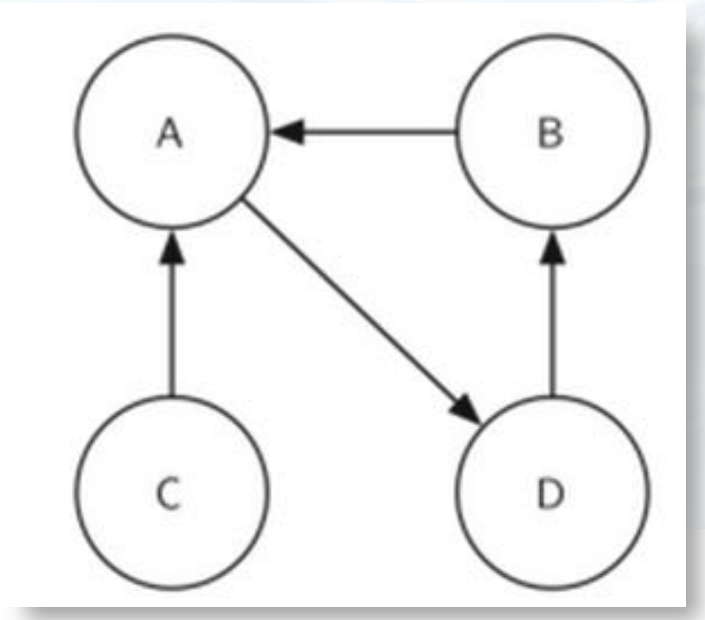
强连通分支算法：转置Transposition概念

- **在使用深度优先搜索DFS算法来发现强连通分支之前，先熟悉一个概念：Transposition转置**

一个有向图G的转置G^T，定义为将图G的所有边的顶点交换次序，如将(v,w)转换为(w,v)，如图所示的图G和转置G^T：

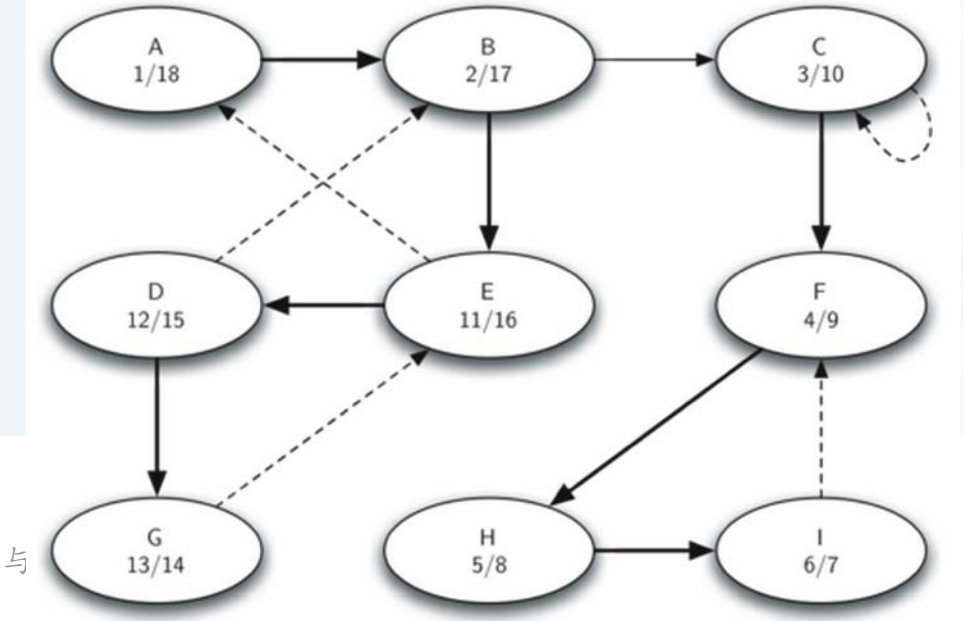
可以观察到图和转置图在强连通分支的数量和划分上，是相同的。

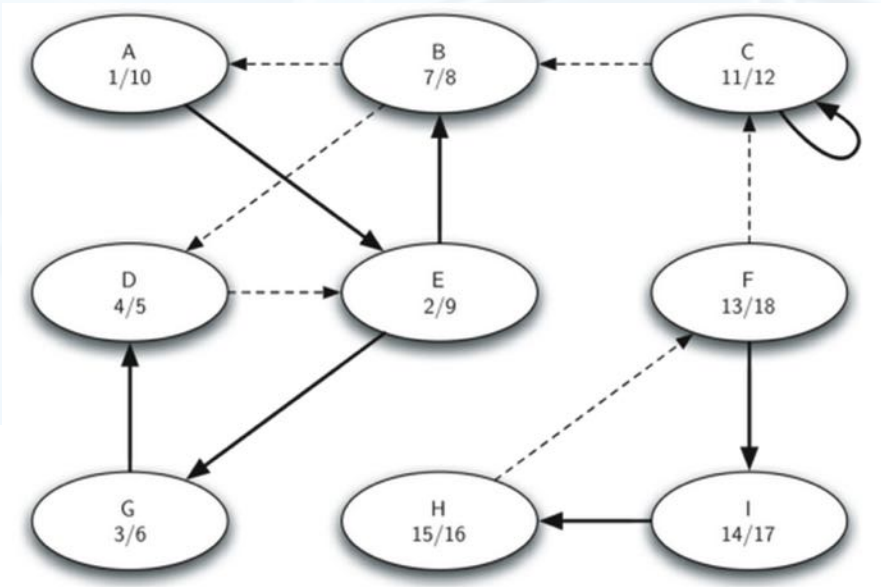




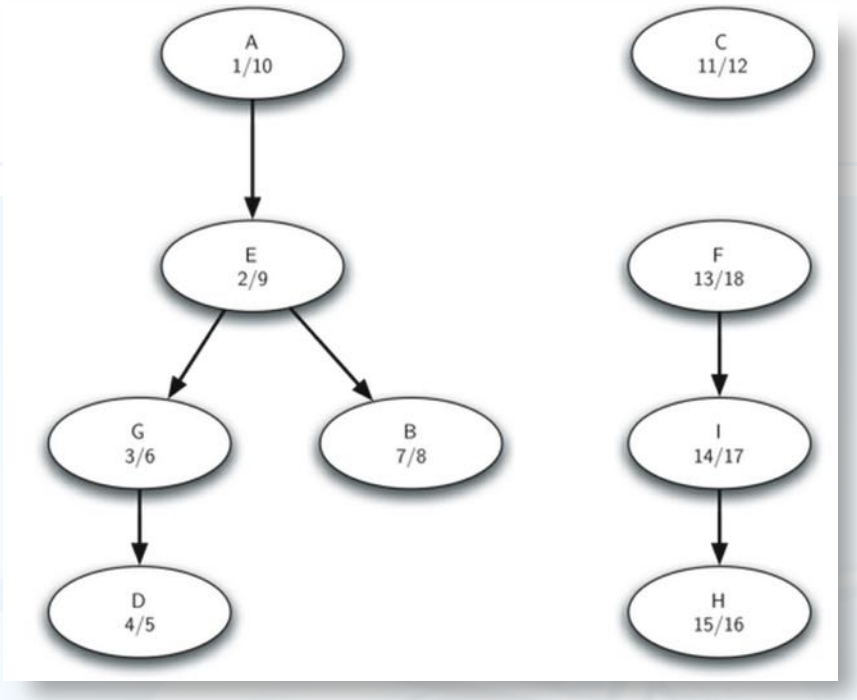
强连通分支算法：思路

- 首先，对图G调用dfs算法，为每个顶点计算“结束时间”；
- 然后，将图G进行转置，得到G^T；
- 再对G^T调用dfs算法，但在dfs函数中，对每个顶点的搜索循环里，要以顶点的“结束时间”倒序的顺序来搜索
- 最后，深度优先森林中的每一棵树就是一个强连通分支





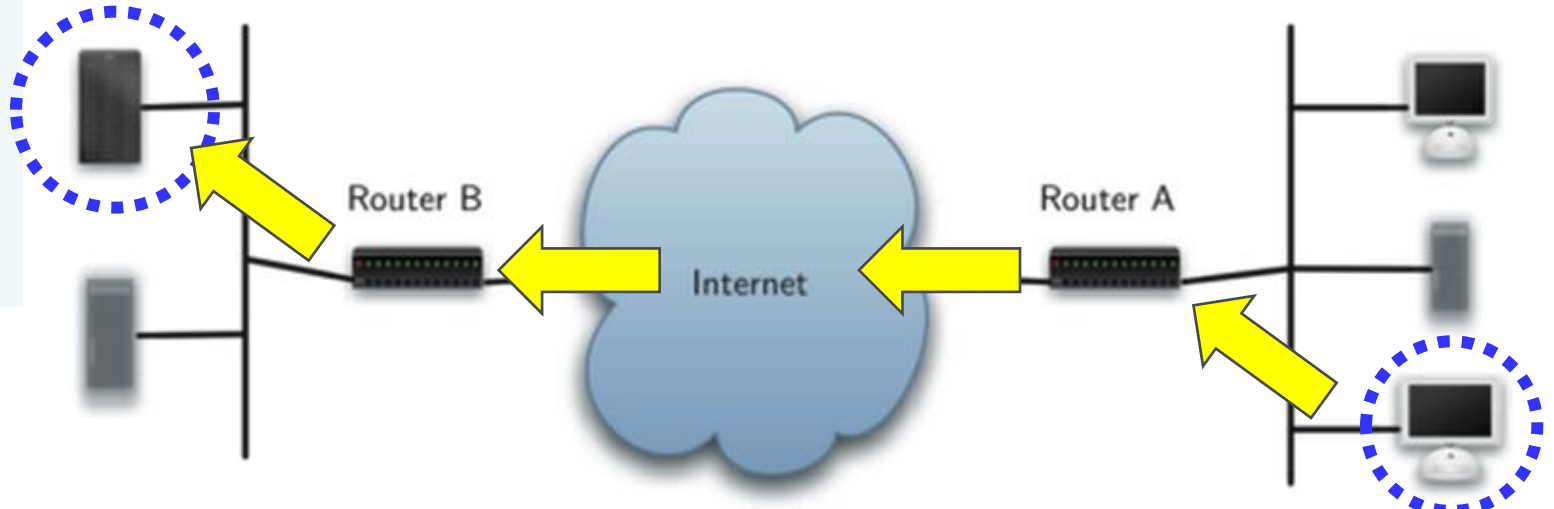
强连通分支算法：思路



- 输出的强连通分支如图
- 本算法的延伸阅读
  http://edward-mj.com/archives/455
- 另一个常用的强连通分支算法
  Tarjan算法
  http://www.cnblogs.com/luweiseu/archive/2012/07/14/2591370.html
- 课后练习1：写出本算法（Kosaraju算法）的代码
- 课后练习2：根据参考资料写出Tarjan算法的代码

最短路径问题：介绍

- 当我们通过网络浏览网页、发送电子邮件、QQ消息传输的时候，数据会在联网设备之间流动，计算机网络专业领域会详尽地研究网络各层面上的技术细节
- 我们对Internet工作方式感兴趣的主要是其中包含的图算法
- 如图，当PC上的浏览器向服务器请求一个网页时，请求信息需要先通过本地局域网，由路由器A发送到Internet，请求信息沿着Internet中的众多路由器传播，最后到达服务器本地局域网所属的路由器B，从而传给服务器。



最短路径问题：介绍

- 图中标注“Internet”的云状结构，实际上是一个由路由器连接成的网络，这些路由器各自独立而又协同工作，负责将信息从Internet的一端传送到另一端。
- 我们可以通过“traceroute”命令来跟踪信息传送的路径（由于某种原因，北大校园网某些部分关闭了路由追踪，无法正常使用本命令），我们来看看从Luther College的web服务器到University of Minnesota的mail服务器之间的一条路由器路径，包含了13
- 由于网络流量的状况会影响
- 路径选择算法，在不同的时
- 间，路径可能不同。

```
1  192.203.196.1
2  hilda.luther.edu (216.159.75.1)
3  ICN-Luther-Ether.icn.state.ia.us (207.165.237.137)
4  ICN-ISP-1.icn.state.ia.us (209.56.255.1)
5  p3-0.hsa1.chi1.bbnplanet.net (4.24.202.13)
6  ae-1-54.bbr2.Chicago1.Level3.net (4.68.101.97)
7  so-3-0-0.mpls2.Minneapolis1.Level3.net (64.159.4.214)
8  ge-3-0.hsa2.Minneapolis1.Level3.net (4.68.112.18)
9  p1-0.minnesota.bbnplanet.net (4.24.226.74)
10  TelecomB-BR-01-V4002.ggnet.umn.edu (192.42.152.37)
11  TelecomB-BN-01-Vlan-3000.ggnet.umn.edu (128.101.58.1)
12  TelecomB-CN-01-Vlan-710.ggnet.umn.edu (128.101.80.158)
13  baldrick.cs.umn.edu (128.101.80.129)(N!)  88.631 ms (N!)
```

最短路径问题：介绍

- **所以我们可以将互联网路由器体系表示为一个带权边的图**

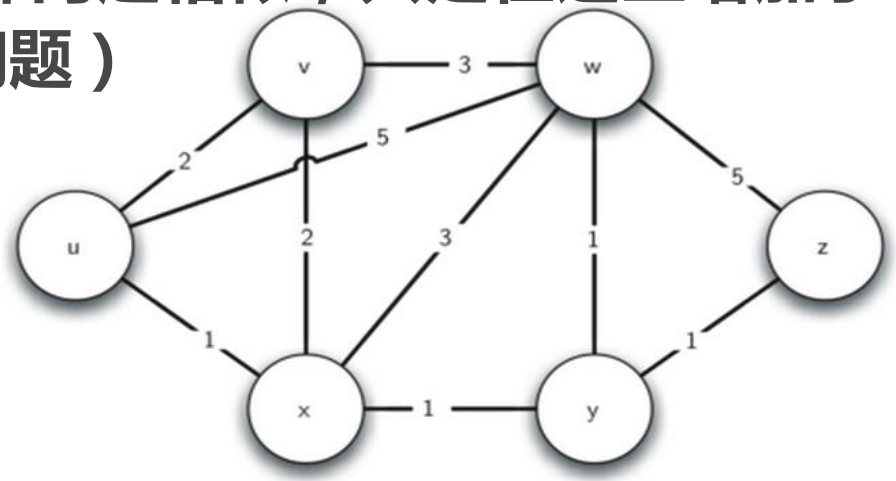
  路由器作为顶点，路由器之间的网络连接作为边

  权重可以包括网络连接的速度、网络负载程度、分时段优先级等影响因素

  作为一个抽象，我们把所有影响因素合成为单一的权重

- **解决信息在路由器网络中选择传播速度最快路径的问题，就转变为在带权图上最短路径的问题。**

- **这个问题与广度优先搜索BFS算法解决的词梯问题相似，只是在边上增加了权重（如果所有权重相等，还是还原到词梯问题）**



最短路径问题：Dijkstra算法

/ˈdɛɪkstra/

- 解决带权最短路径问题的经典算法是以发明者命名的“Dijkstra算法”，这是一个迭代算法，得出从一个顶点到其余所有顶点的最短路径，很接近于广度优先搜索算法BFS的结果。
- 具体实现上，在顶点Vertex类中的成员**dist**用于记录从开始顶点到本顶点的最短带权路径长度（**权重之和**），算法对图中的每个顶点迭代一次。
- 顶点的访问次序由一个**优先队列**Priority Queue来控制，优先队列中作为优先级的是顶点的dist属性。
- 最初，只有开始顶点dist设为0，而其他所有顶点dist设为sys.maxint（最大整数），全部加入优先队列。
- 随着开始顶点率先出队，并计算它与邻接顶点的权重，会引起其它顶点dist的减小和修改，引起堆重排，并据此依次出队。

最短路径问题：Dijkstra算法代码

对所有顶点建堆，形成优先队列

优先队列出队

修改出队顶点所邻接顶点的dist，并逐个重排队列

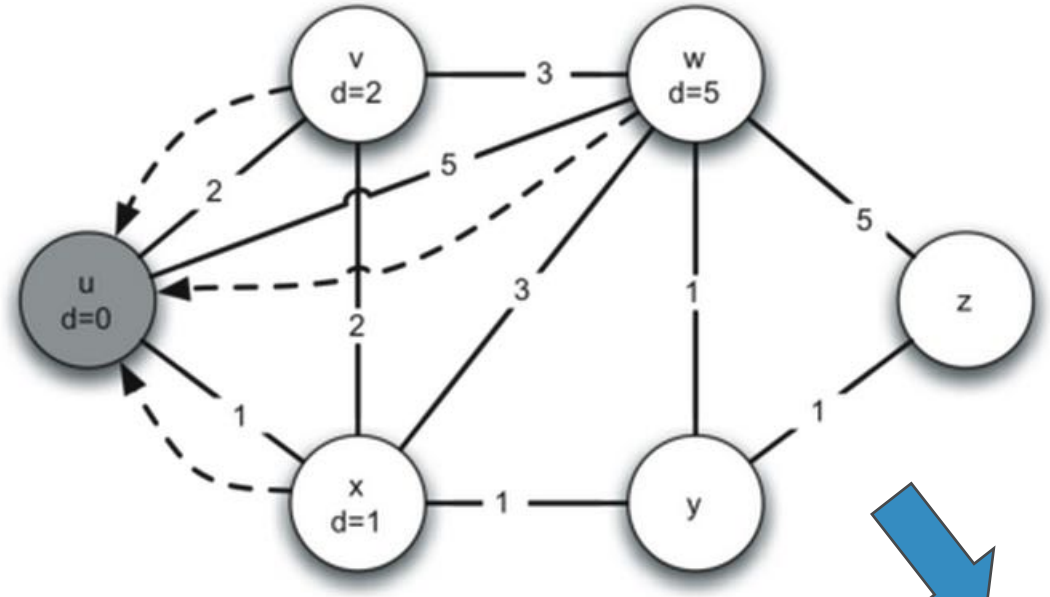
```
from pythonds.graphs import PriorityQueue, Graph, Vertex
def dijkstra(aGraph,start):
    pq = PriorityQueue()
    start.setDistance(0)
    pq.buildHeap([(v.getDistance(),v) for v in aGraph])
    while not pq.isEmpty():
        currentVert = pq.delMin()
        for nextVert in currentVert.getConnections():
            newDist = currentVert.getDistance() \
                    + currentVert.getWeight(nextVert)
            if newDist < nextVert.getDistance():
                nextVert.setDistance( newDist )
                nextVert.setPred(currentVert)
                pq.decreaseKey(nextVert,newDist)
```

重排队列

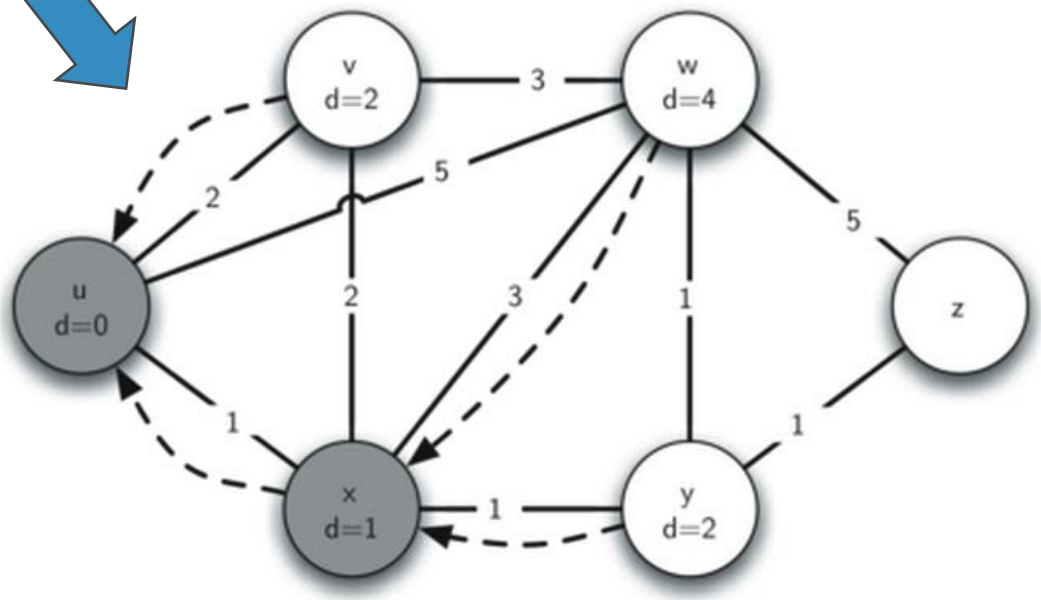
BFS对比

```
def bfs(g,start):
  start.setDistance(0)
  start.setPred(None)
  vertQueue = Queue()
  vertQueue.enqueue(start)
  while (vertQueue.size() > 0):
    currentVert = vertQueue.dequeue()
    for nbr in currentVert.getConnections():
      if (nbr.getColor() == 'white'):
        nbr.setColor('gray')
        nbr.setDistance(currentVert.getDistance() + 1)
        nbr.setPred(currentVert)
        vertQueue.enqueue(nbr)
    currentVert.setColor('black')
```

最短路径问题：Dijkstra算法实例

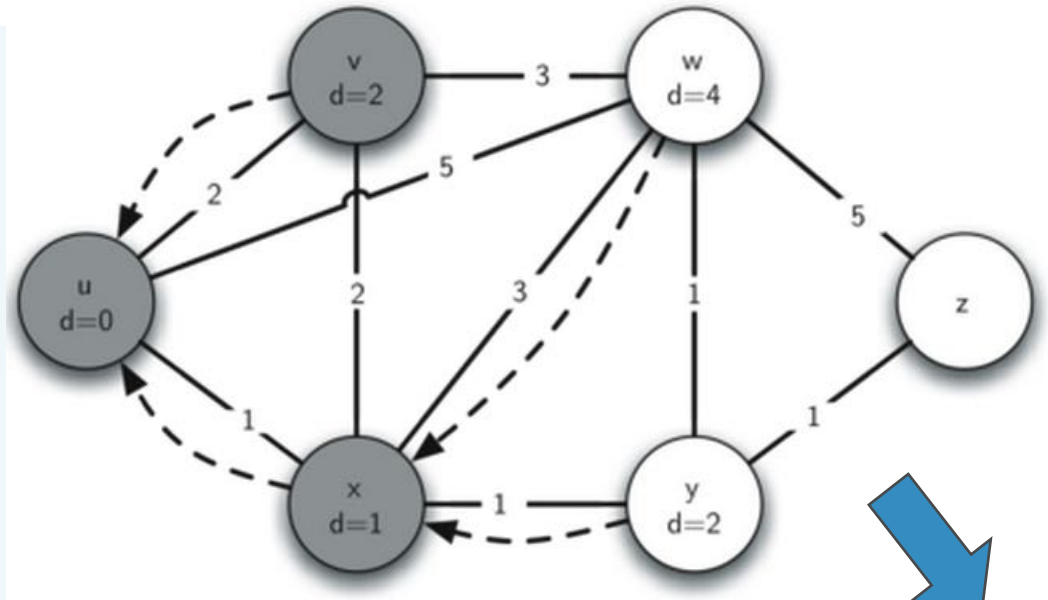


PQ = x,v,w

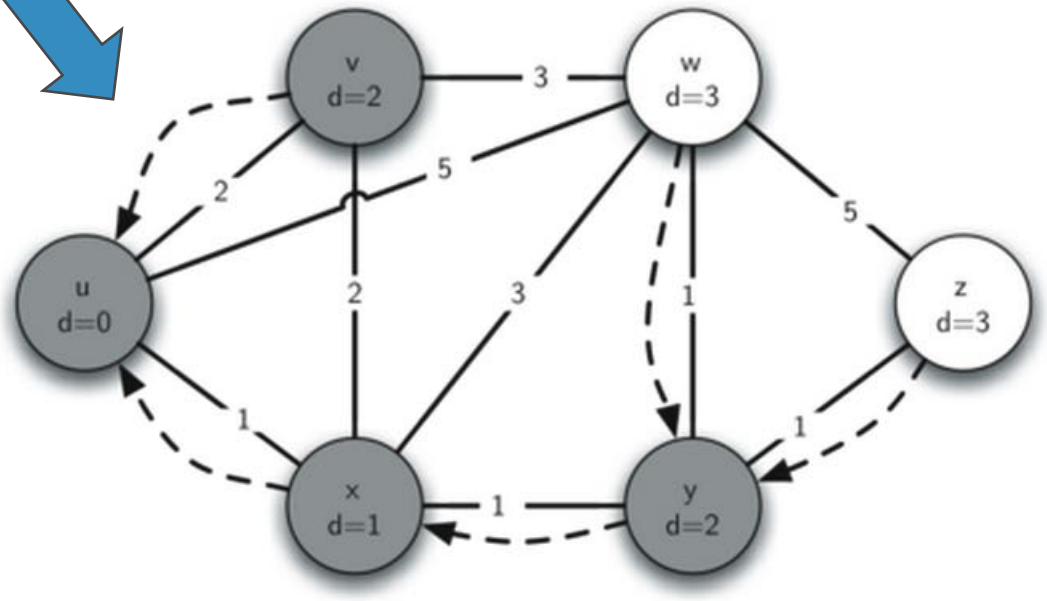


PQ = vy,w

最短路径问题：Dijkstra算法实例

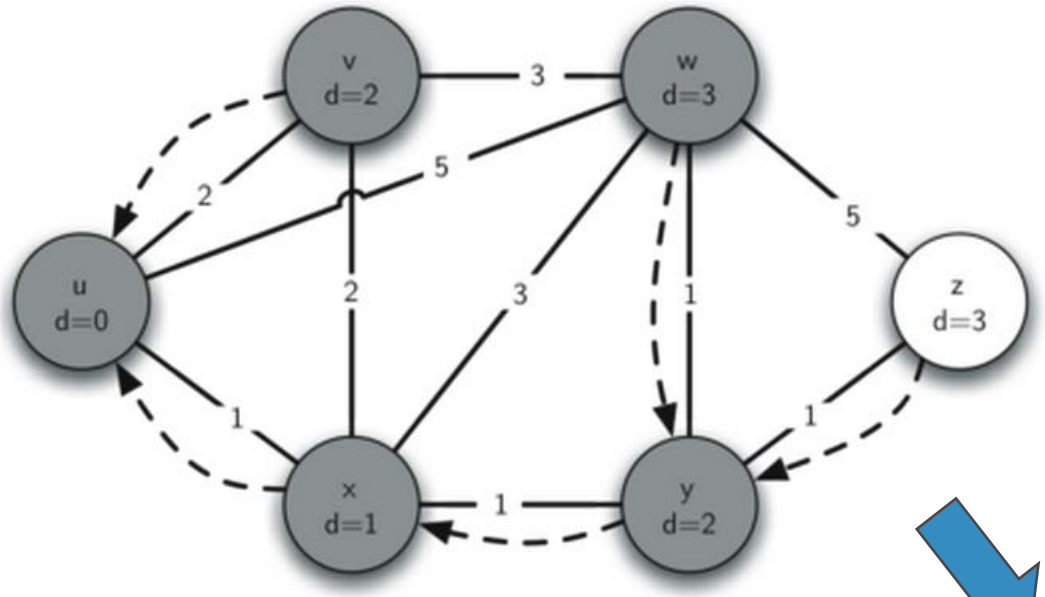


PQ = yw

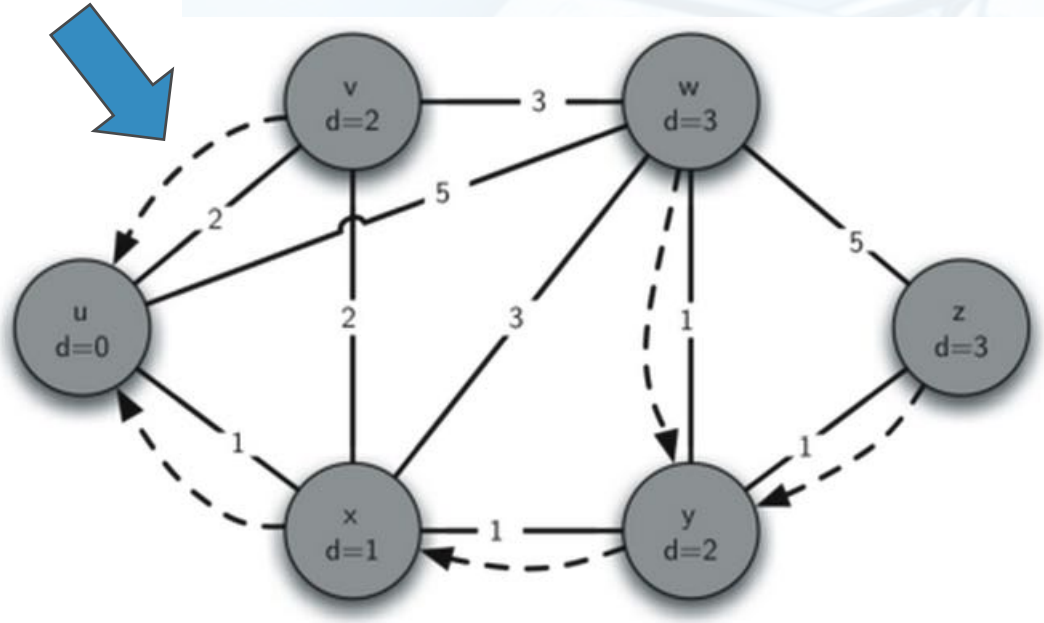


PQ = wz

最短路径问题：Dijkstra算法实例



PQ = z



PQ = None

最短路径问题：Dijkstra算法

- 需要注意的是，Dijkstra算法只能处理大于0的权重，如果图中出现负数权重，则算法会陷入无限循环
- 虽然Dijkstra算法完美解决了带权图的最短路径问题，但实际上Internet的路由器中采用的是其它算法（☺）
- 其中最重要的原因是，Dijkstra算法需要具备整个图的数据，但对于Internet的路由器来说，显然无法将整个Internet所有路由器及其连接信息保存在本地，这不仅是数据量的问题，Internet动态变化的特性也使得保存全图缺乏现实性。
- 路由器的选径算法（或“路由算法”）对于互联网极其重要，有兴趣可以进一步参考“距离向量路由算法“。

http://baike.baidu.com/view/1227645.htm

最短路径问题：Dijkstra算法分析

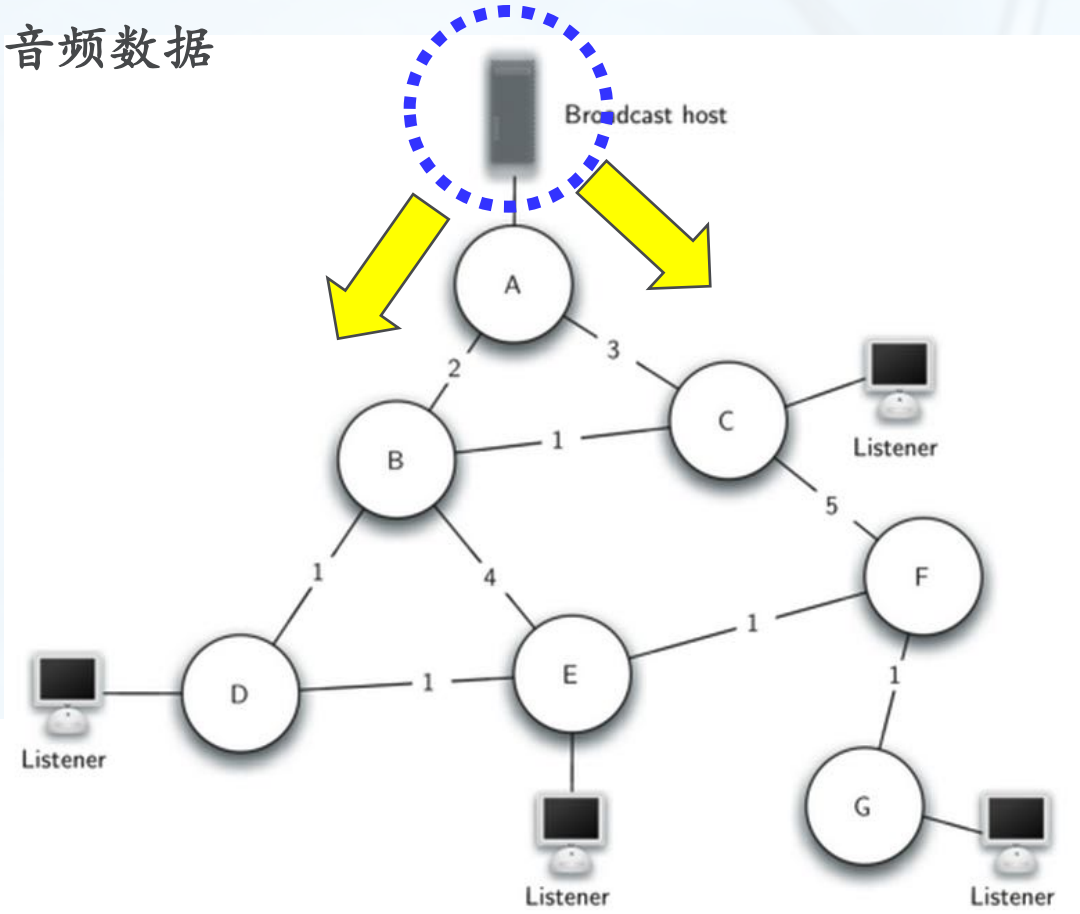
- 最后，我们对Dijkstra算法的运行时间进行分析
- 首先，将所有顶点加入优先队列并**建堆**，时间复杂度为O(|V|)
- 其次，每个顶点仅出队1次，每次**delMin**花费O(log|V|)，一共就是O(|V|log|V|)
- 另外，每个边关联到的顶点会做一次**decreaseKey**操作（O(log|V|)），一共是O(|E|log|V|)
- 三个加在一起，数量级就是O((|V|+|E|)log|V|)

最小生成树

- **最后一个图算法，涉及到在互联网中网游设计者和Internet收音机所面临的问题：信息广播问题**

  网游需要让所有玩家获知其他玩家所在的位置

  收音机则需要让所有收听用户获取直播的音频数据

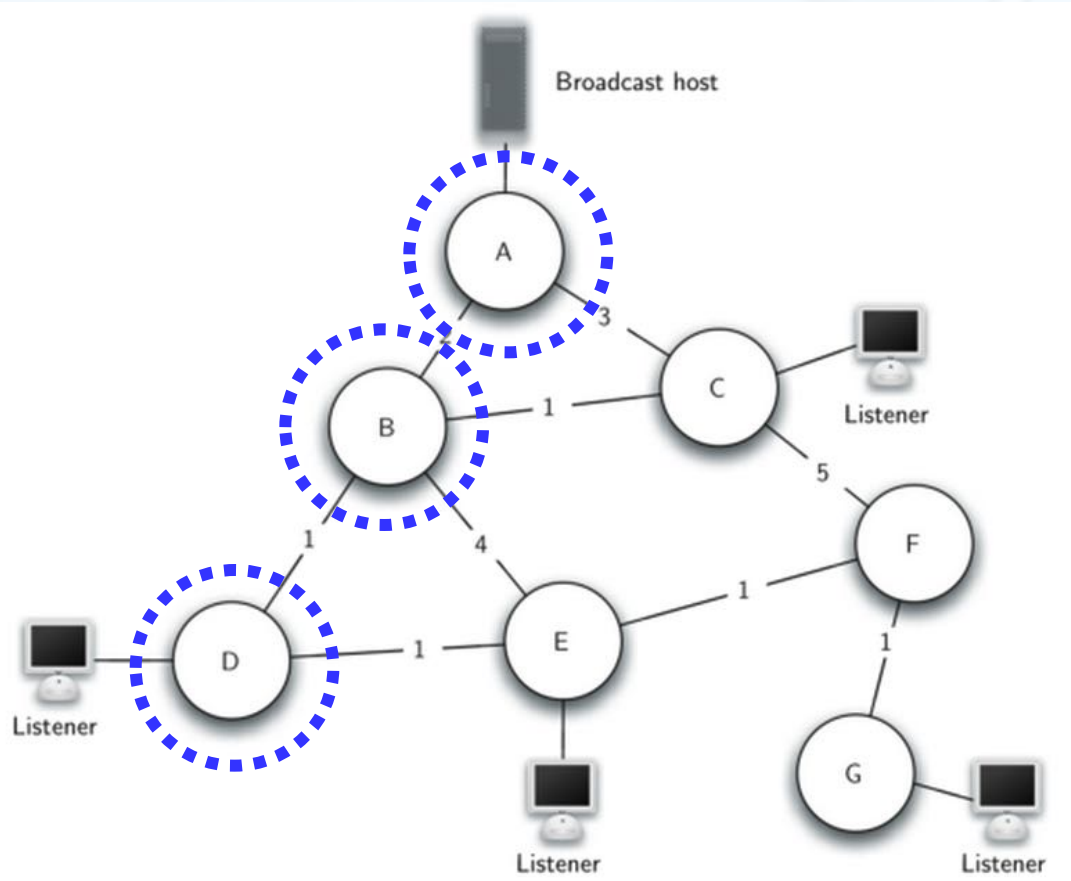


信息广播问题：单播解法

- 信息广播问题最简单的解法是由广播源维护一个收听者的列表，将每条消息向每个收听者发送一次

  如图，每条消息会被发送4次，每个消息都采用最短路径算法到达收听者

- 路由器A会处理4次相同消息；
- 路由器C仅会处理1次；
- 而路由器B/D位于其它3个
- 收听者的最短路径上，则
- 各会处理转发3次相同消息；
- 所以，会产生许许多多额外
- 流量



信息广播问题：洪水解法

- **信息广播问题的暴力解法，是将每条消息在路由器间散布出去，所有的路由器都将收到的消息转发到自己相邻的路由器和收听者**

  显然，如果没有任何限制，这个方法将造成网络洪水灾难，很多路由器和收听者会不断重复收到相同的消息，永不停止！

- **所以，洪水解法还会给每条消息附加一个生命值（TTL:Time To Live），初始设置为从消息源到最远的收听者的距离；**

- **每个路由器收到一条消息，如果其TTL值大于0，则将TTL减少1，再转发出去**

  如果TTL等于0了，则就直接抛弃这个消息。

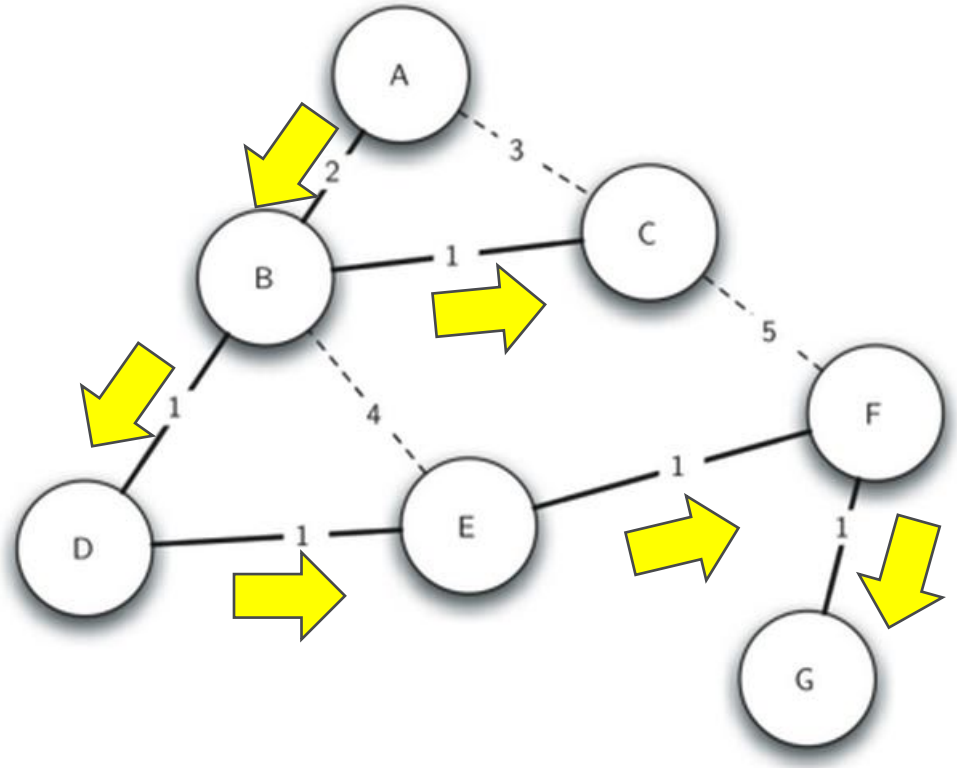
- **TTL的设置防止了灾难发生，但这种洪水解法显然比前述的单播方法所产生的流量还要大。**

信息广播问题：最小生成树

- 信息广播问题的最优解法，依赖于路由器关系图上选取具有最小权重的生成树（minimum weight spanning tree）

  生成树：拥有图中所有的顶点和最少数量的边，以保持连通的子图。

- 图G(V,E)的最小生成树T，定义为包含所有顶点V，以及E的无圈子集，并且边权重之和最小。
- 图为一个最小生成树
- 这样信息广播就只需要从A开始
- 沿着树的路径层次向下传播
- 就可以达到每个路由器只需要
- 处理1次消息，同时总费用最小。



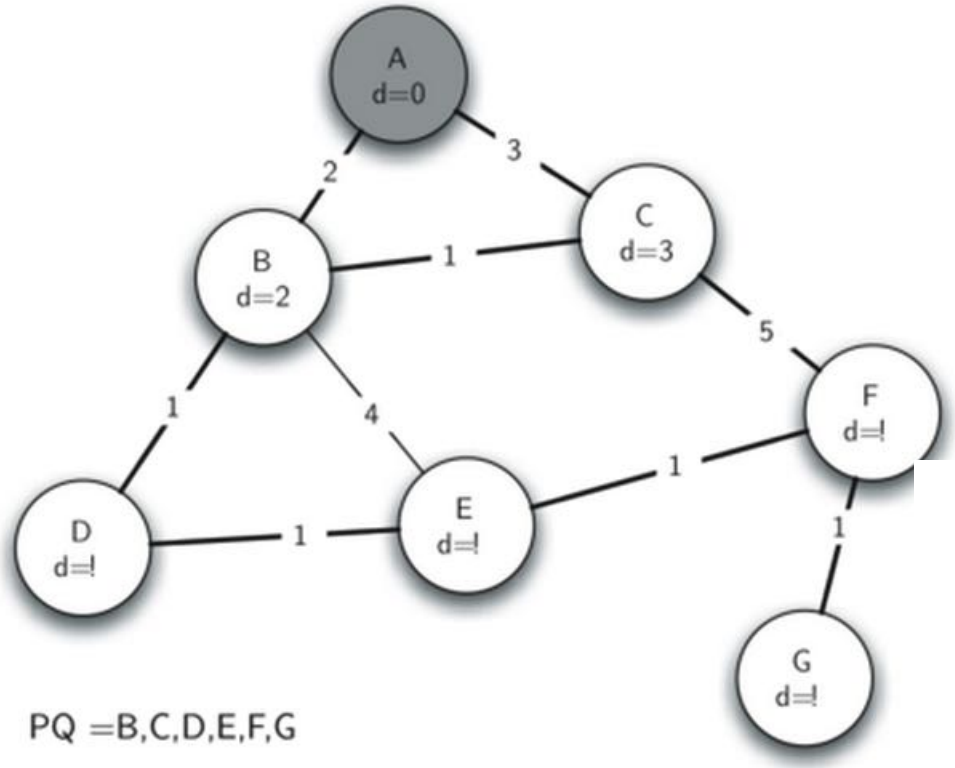
最小生成树：Prim算法

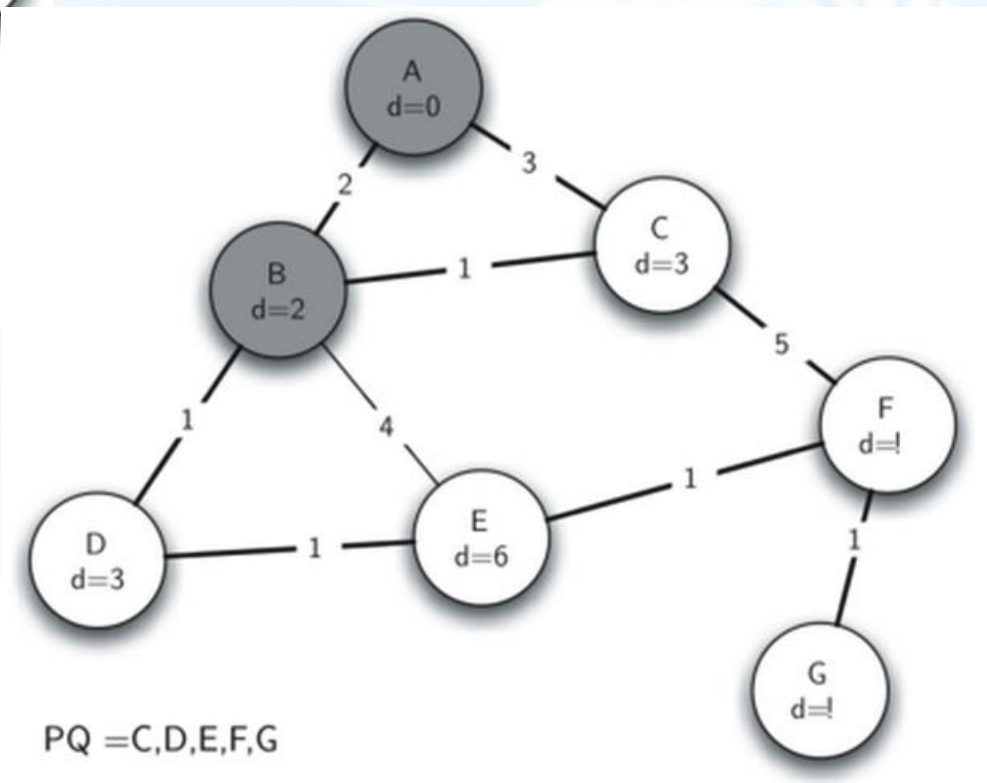
- 解决最小生成树问题的Prim算法，属于“贪心算法”，即每步都沿着最小权重的边向前搜索。
- 构造生成树的思路如下：

  如果T还不是生成树，则反复做：

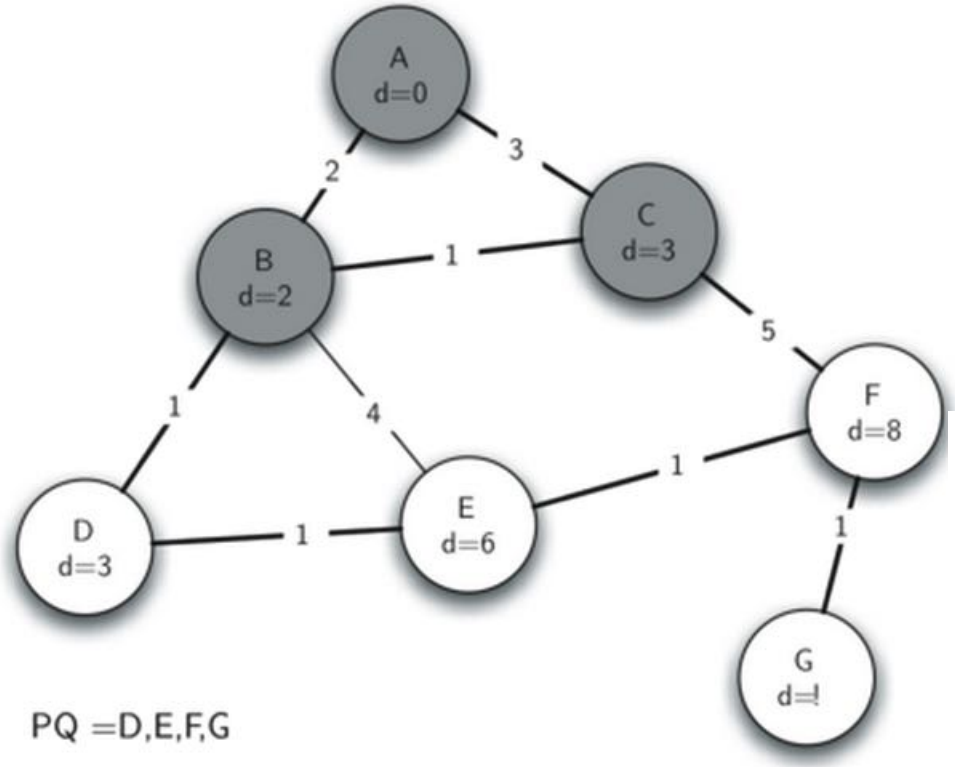
  - 找到一条可以安全添加到树T的边
  - 将边添加到树T
- “**可以安全添加**”的边，定义为一端顶点在树中，另一端不在树中的边，以便保持树的无圈特性

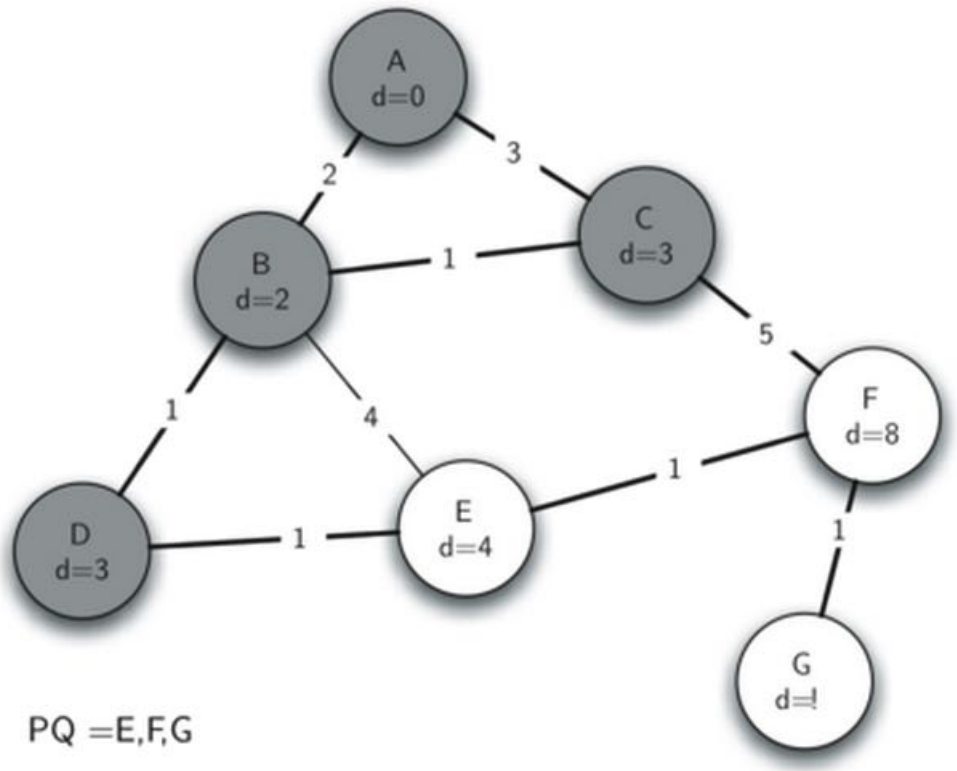
最小生成树：prim算法示例



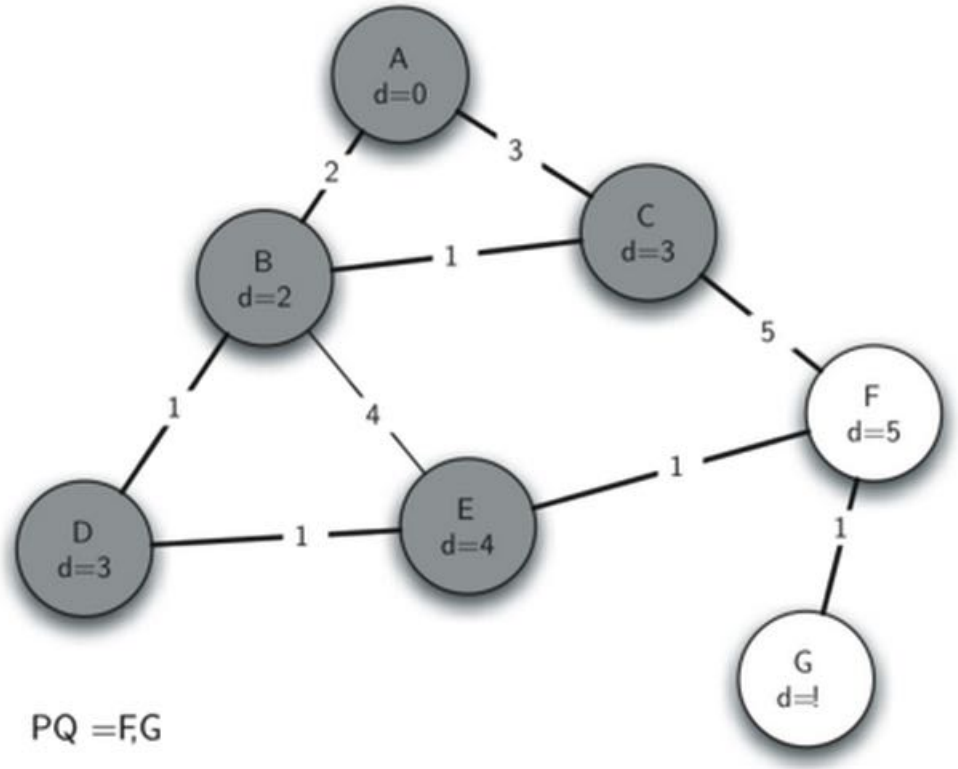


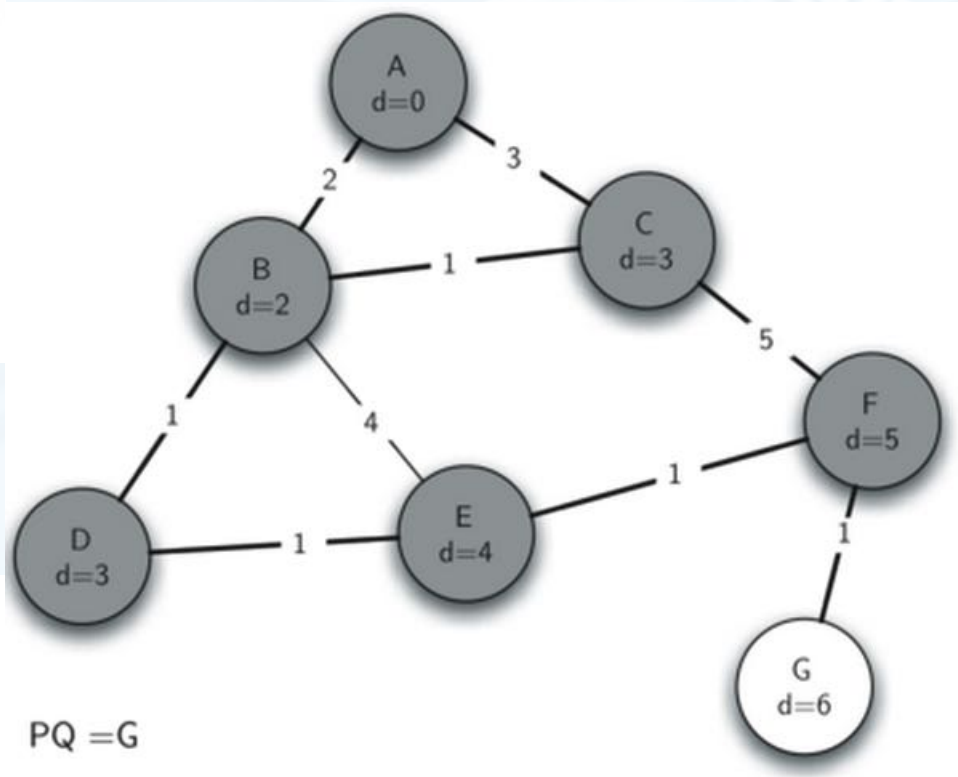
最小生成树：prim算法示例



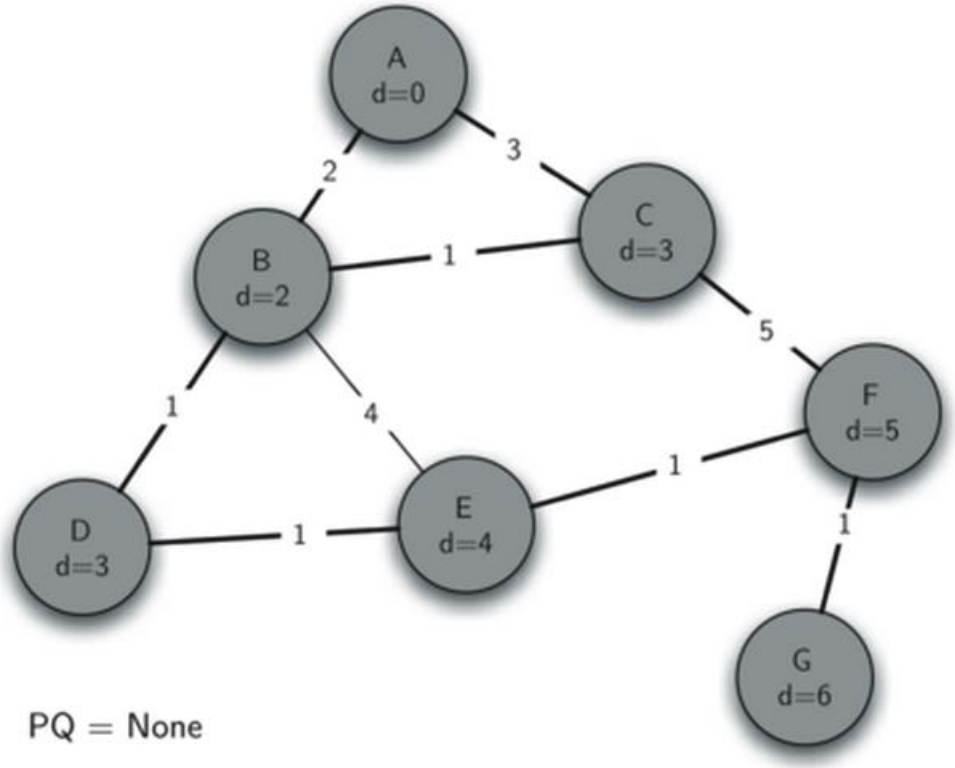


最小生成树：prim算法示例





最小生成树：prim算法示例



本章总结

- 本章我们学习了图抽象数据类型，以及若干实现方法
- 本章讨论了一些图的算法和应用

广度优先搜索算法BFS，解决无权图的最短路径问题；

带权图的Dijkstra算法；

图的深度优先搜索算法；

用于简化图的强连通分支算法；

用于关联任务排序的拓扑排序算法；

用于广播消息的最小生成树算法。

参考文献

- 从六度分隔到无尺度网络：
  http://www.socialbeta.com/articles/the-wisdom-of-sns-part-one.html